

可積分模型の統一理論としての 4次元 Chern-Simons 理論

京都大学 理学研究科
物理学・宇宙物理学専攻 素粒子論研究室

福島 理

Abstract

可積分系の手法は格子模型や2次元の場の理論といった多くの系の厳密な解析に洞察を与えてきた。これらの模型を統一的に取り扱う枠組みとして注目されているのが4次元 Chern-Simons(CS)理論である。4次元 CS理論は4次元空間 $C \times M$ 上で定義されたある種のゲージ理論である。この立場では Riemann 面 C のトポロジーとツイスト関数、表面欠陥上での境界条件を指定することにより様々な可積分模型が導出される。このようにして導出される模型には AdS/CFT 対応の文脈でも重要な役割を果たす系が含まれている。また、可積分な背景時空上での非線形シグマ模型を導く手法として可積分変形が知られており、その代表例が Yang-Baxter 変形である。多くの可積分変形が4次元 CS理論から再導出されることが知られている。本論文では場の理論に対する可積分系のアプローチをレビューした後、主カイラル模型や対称コセットシグマ模型、 $AdS_5 \times S^5$ 超弦理論に対する Yang-Baxter 変形を導出する。また、主カイラル模型の Poisson 構造を修正した ultralocal な系である Faddeev-Reshetikhin(FR)模型もこの枠組みから導く。これらの導出法を応用することにより、4次元 CS理論の立場から主カイラル模型に対する新しいタイプの Yang-Baxter 変形や FR 模型の trigonometric 変形を新たに構成できることを示す。

Contents

1	Introduction	5
1.1	可積分系と場の理論	5
1.2	AdS/CFT 対応と可積分変形	8
2	古典可積分性	11
2.1	Lax pair による可積分系の記述	11
2.1.1	Lax pair とモノドロミー行列	11
2.1.2	具体例	15
2.2	Yang-Baxter 方程式	17
2.2.1	整合性条件による Yang-Baxter 方程式の導出	18
2.2.2	R -作用素	21
2.3	Poisson 構造の ultralocality	24
2.4	可積分変形	31
2.4.1	主カイラル模型に対する Yang-Baxter 変形	31
2.4.2	対称コセットシグマ模型	33
2.4.3	対称コセットシグマ模型の Yang-Baxter 変形	37
3	4次元 Chern-Simons 理論	40
3.1	位相的場の理論と可積分格子模型	40
3.2	場の理論の導出	43
3.3	Disorder defect による可積分変形	46
3.3.1	運動方程式	47
3.3.2	Lax 形式	49
3.3.3	archipelago 条件による次元簡約	50
3.3.4	rational 処方での η 変形された主カイラル模型の導出	52

4	Trigonometric 処方による主カイラル模型の導出	55
4.1	ツイスト関数	55
4.2	境界条件	57
4.3	Lax 形式と 2 次元の作用	59
4.4	\tilde{j} と j の関係付け	62
4.5	Left-right 双対性	68
4.6	$SU(2)$ の特殊性	69
5	コセット模型及びその Yang-Baxter 変形	71
5.1	対称コセットシグマ模型	71
5.2	$AdS_5 \times S^5$ 超弦理論の Yang-Baxter 変形	77
6	Faddeev-Reshetikhin 模型	86
6.1	Non-ultralocality の緩和と FR 模型	86
6.1.1	古典作用	86
6.1.2	Poisson 構造	89
6.2	4 次元 CS 理論による FR 模型の導出	89
6.2.1	2 つの order defect を持った 4 次元 CS 理論	89
6.2.2	Lax 形式	92
6.2.3	Archipelago 条件による 4 次元から 2 次元への簡約	93
6.3	FR 模型の trigonometric 変形	96
6.3.1	ツイスト関数	96
6.3.2	境界条件	98
6.3.3	Lax 形式と 2 次元作用	99
7	結論・今後の展望	102
A	Boundary EOM の解き方	105
A.1	Drinfel'd double	105
A.2	Boundary EOM (4.2.2), (4.2.3) の解	106
A.3	Boundary EOM (4.2.4) に対する解	111
B	λ-map の表現	113

C	新型 YB 変形 (4.4.29) の可積分性の直接証明	115
C.1	作用 (4.4.29) に対する運動方程式	115
C.2	(4.4.22) の平坦性条件の評価	116
C.3	(C.1.9) と (C.2.8) の比較	118
D	η 変形された $SL(2, \mathbb{R})$ 主カイラル模型のスケーリング極限	120
D.1	$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対する古典 r -行列	120
D.2	η 変形された $SL(2, \mathbb{R})$ 主カイラル模型のスケーリング極限	121
E	$\mathfrak{su}(2, 2 4)$ supercoset に基づいた $AdS_5 \times S^5$ 弦理論の記述	123
E.1	Lie superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2 4)$	123
E.2	$\mathfrak{sl}(4 4)$ の \mathbb{Z}_4 -grading	125
F	Dressed R-作用素に対する関係式	130
F.1	\mathbb{Z}_2 -grading の場合	130
F.2	$SU(2, 2 4)$ の場合	131
G	Homogeneous bi-YB シグマ模型	133

Chapter 1

Introduction

1.1 可積分系と場の理論

可積分模型は理論物理のいたるところに現れ、それらを系統的に扱うことは重要な課題である。一般に可積分模型は多数の (しばしば無限次元の) 対称性を持ち、その対称性により厳密に解くことができる。このように記述されるのは自然界に現れる物理的な系の一部に過ぎないが、それにも関わらず可積分模型は現実世界の系に普遍的な洞察を与え、あるいは新しいアイディアの理論的な実験場として用いられてきた。例えば統計力学において、熱力学極限に伴う多くの不明瞭な点が理解され、Lenz-Ising 模型の相転移やアイス模型の境界条件の果たす役割などが明らかになった。流体力学では、Korteweg-de Vries (KdV) 方程式の解析により非線形微分方程式に対するソリトンと呼ばれる安定な局在波解が存在することが示された。物性物理においては Bethe 仮説 (Bethe ansatz) を用いた可積分量子スピン鎖や 1 次元の準自由粒子気体の解析が重要な役割を果たしている。2 次元の場の量子論においても、厳密に可解な系は様々な現象の解明に役立ってきた。カイラル Gross-Neveu 模型に対する次元変換や、sine-Gordon 模型と Thirring 模型に対する bosonization はこの顕著な例である。可積分な場の理論を扱う一般的な枠組みは主に逆散乱法 (inverse scattering method) や因子化問題 (factorization problem) に関連しており、これらの手法が 1970 年代に確立して以来数多くの応用が見出されてきた。

可積分系の一般的な枠組みを最初に与えたのは J. Liouville であり、それは求積法 (quadrature) によって運動の積分が求まるというものである。Liouville の定理によると、系の自由度と同じ数だけの独立な保存チャージが存在し、かつそれらが Poisson 可換 (包合的) であるとき上記の意味での古典可積分性が従う。場の理論は無限自由度の力学系と見做せるため、Liouville 可積分性を素直に拡張しようとするならば無限個の保存チャージが必要となる。これを実現し、可積分系を特徴付ける方法の一つに *Lax pair* (**Lax 対**) を用いるものがある。2 次元時空 \mathcal{M} 上のある古典的な場の理論が与えられたとき、その理論が可積分であることを判断するためには以下の性質を満たす接続 $d + \mathcal{L}$ があることを

示せば良い。

- \mathcal{L} が Riemann 面 C から複素 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ への写像であり、有理型関数となる。
- 接続 $d + \mathcal{L}$ が on-shell で平坦である。
- その接続で与えられる運動の積分が包合的 (in involution) である。

これらの性質の詳細については 2 章で述べる。ここで \mathcal{L} の各成分の組 $(\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-)$ を Lax pair と呼ぶ。Riemann 面 C の複素座標 z はスペクトラルパラメータと呼ばれ、Lax pair はループ代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ の元であると言える。Lax pair を用いることにより系に無限個の保存カレントと保存チャージを構成可能であり、これら無限個の保存カレントのなす代数は典型的に量子群としての構造で特徴付けられる。また、Riemann 面 C のトポロジーによって可積分系は分類され、平面、円柱、トーラスに対応してそれぞれ rational、trigonometric、elliptic の 3 つのクラスの可積分系が存在する。

2次元の古典可積分な場の理論はその Poisson 構造により ultralocal な系と non-ultralocal な系に分類される。前者は Lax pair 同士の Poisson 括弧の座標依存性としてデルタ関数のみを含むものであり、後者はデルタ関数の微分項を含むものである。ultralocal な場の理論は量子可積分性への拡張がよく知られており、系の厳密なエネルギースペクトラムや S-行列は量子逆散乱法 [1–3] を用いて計算することができる。しかし、Chapter 2 で述べるように non-ultralocal な Poisson 括弧を持つ場の理論に対してはこの量子逆散乱法を適用することが困難であるという問題がある。主カイラル模型などの物理的に興味のある多くの模型は non-ultralocal なクラスに属していることが知られており、これらの系に対して量子逆散乱法を応用することは重大な課題である。

近年、K. Costello, E. Witten, M. Yamazaki らにより幾何学的なアプローチから可積分な格子模型や場の理論を構成する **4次元 Chern-Simons 理論** (以下 4次元 CS 理論) という枠組みが提案された [4–8]。Lax pair \mathcal{L} は底空間 $C \times \mathcal{M}$ を持つベクトル束の接続としての構造を持っているため、その運動方程式を 4次元空間 $C \times \mathcal{M}$ 上のゲージ理論から導出する試みである。4次元 CS 理論の作用は次のように与えられる。

$$S = \frac{i}{4\pi\hbar} \int_{\mathcal{M} \times C} \omega \wedge \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right), \quad \omega : \text{有理型 1 形式}. \quad (1.1.1)$$

ゲージ場 A は \mathcal{L} と関連づく物理量であり、 C 上の座標 z の有理型関数として振る舞う。一方、2次元曲面 \mathcal{M} の方向に対しては理論は位相不変であるという性質がある。前述の 3 つの可積分性の定義は 4次元 CS 理論の動力学により、 \mathcal{M} へと次元簡約した時に自然に導出される。この時複素座標 z は可積分系のスペクトラルパラメータと同定することができる。特に 3 つ目の包合的な性質は Yang-Baxter

方程式という関係式によって特徴づけられるが、これは M 方向の位相不変性と密接な関係があることがわかる。また、4次元の場の理論と2次元の可積分模型を結びつける他の枠組みとして、超対称ゲージ理論を用いるものが研究の対象になってきた [9–12]。これに対して、4次元 CS 理論による手法は超対称性に頼らず位相不変性を足掛かりにして可積分系を導くという点で単純であるという利点がある。

4次元 CS 理論を2次元へと簡約する処方方は order defect に基づくもの [13–18] と disorder defect に基づくもの [19–27] に大別される。これらは共に2次元の表面欠陥であるが、その導入方法は真に異なったものである。order defect は量子論として摂動論的に良く定義されていることが知られているが [6]、他方 disorder order に関しては古典論的な側面しか明らかになっていない。B. Vicedo [28] はこの order defect と disorder defect の分類がそれぞれ可積分系の ultralocal な理論と non-ultralocal な理論に対応することを示唆し、さらにツイスト関数と有理型 1 形式 ω が同一であることを示した。ツイスト関数とは Lax pair の Poisson 括弧に現れるスペクトラルパラメータ z に依存する関数であり、可積分系を特徴づける量の一つである。以上を踏まえると、長きにわたる non-ultralocal な理論の量子可積分性の問題は、4次元 CS 理論においては disorder defect の量子論的な定式化へと焼き直されていることがわかる。また、disorder defect の取り扱いが技術的に複雑である反面、Section 1.2 で述べる可積分変形などの豊富な構造を持っている [19–24]。よって、disorder defect にまつわる様々な模型が4次元 CS 理論から導出される機構を解明することは意義深い。

1.2 AdS/CFT 対応と可積分変形

AdS/CFT 対応の文脈でも可積分系の解析手法が注目を集めてきた。(包括的なレビューとして、[29]がある。) AdS/CFT 対応はホログラフィー原理の具体例であり、「反ド・ジッター (AdS) 時空を背景に持つ超弦理論」と「境界上の共形場理論 (CFT)」が等価だという主張である。最も標準的な例とされるのは、 $\text{AdS}_5 \times S^5$ 上のタイプ IIB 超弦理論と $\mathcal{N} = 4$ の 4 次元超対称 Yang-Mills (SYM) 理論の対応関係である。これらの理論には 2 つの独立なパラメータがあり、次のような関係式を満たすとされている。

$$g_{\text{YM}}^2 = 4\pi g_s, \quad g_{\text{YM}}^2 N = \frac{L^4}{\alpha'^2}. \quad (1.2.1)$$

左辺が SYM 理論のパラメータであり、 g_{YM} が Yang-Mills coupling、 N がゲージ群のカラーの数である。右辺にある超弦理論のパラメータは g_s が弦の相互作用の coupling constant、 $L/\sqrt{\alpha'}$ が有効な AdS_5 及び S^5 の半径である。このパラメータの対応関係の下で 2 つの理論における観測量が 1 対 1 に対応していることを AdS/CFT 対応は示唆している。

この対応関係は主に large N 極限において評価されてきた。large N 極限とは 't Hooft coupling $\lambda := g_{\text{YM}}^2 N$ を固定してカラー数を $N \rightarrow \infty$ とする極限である。この極限の下で弦理論はストリングループの寄与が消え、SYM 理論においてはプラナーダイアグラムのみが残る。この意味で large N 極限はプラナー極限とも呼ばれる。しかし、2 つの理論を摂動論的に評価しようとした時、近似が有効なパラメータ領域が異なるという難点がある。large N の極限の下で弦理論は曲がった時空を背景時空としても非線形シグマ模型になるが、この摂動論が良い近似になるのは時空の平坦に近い時、つまり $\lambda = L^4/\alpha'^2 \gg 1$ の時である。一方、SYM 理論の摂動展開は 't Hooft coupling が小さい時、 $\lambda \ll 1$ で意味を持つ。よって両者の間で比較を行うためには何らかの工夫が必要であり、その 1 つが可積分性の援用である。

AdS/CFT 対応を検証する上で最もよく解析されてきた物理量は閉弦のエネルギースペクトラムである。これは SYM 理論の立場では対応する局所演算子のスケーリング次元に対応する。プラナー極限において、 $\mathfrak{su}(2)$ セクターのシングルトレース演算子は 1 ループレベルで XXX スピン鎖の Hamiltonian と同じ構造を持ち [30]、他のセクターに対しても同様のスピン鎖の構造がある [31–33]。さらに、熱力学極限において all-order での可積分性が示唆され、この時漸近的 Bethe 仮説を用いて任意の λ でのスケーリング次元を求めることができる [34, 35]。これにより、弦理論側で対応する閉弦の半古典的なエネルギースペクトラム [36–38] と比較することが可能になる。SYM 理論に可積分なスピン鎖の構造があることを踏まえると、双対な超弦理論にもやはり可積分性があると考えるのが自然である。実

際、 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ を背景時空にもつ Green-Schwarz 形式の超弦理論に対して Lax pair が構成される [39]。プラナー極限において、この超弦理論は supercoset $PSU(2, 2|4)/(SO(1, 4) \times SO(5))$ に基づいた非線形シグマ模型で記述される。supercoset $PSU(2, 2|4)/(SO(1, 4) \times SO(5))$ は \mathbb{Z}_4 -grading の構造を持っており、これを利用することにより運動方程式と等価な平坦性条件を持つ Lax pair を構成できる。しかしながら、この Lax pair は non-ultralocal な Poisson 構造を持つことが知られており [40, 41]、量子論のレベルで可積分性を示すことは容易ではない。

より一般の時空での弦理論と境界の場の理論の対応関係を調べるために、系の可積分性を保ったまま理論を変形することが有効である。このような技法を可積分変形と呼ぶ。代表的な可積分変形の例として、**Yang-Baxter 変形**が挙げられる。Yang-Baxter 変形は古典 Yang-Baxter 方程式を満たす r -行列によって特徴付けられ、実パラメータ η に依った変形である。これは当初主カイラル模型に対して導入され [42, 43]、 \mathbb{Z}_2 -grading を持つ対称コセットシグマ模型へと応用された [44, 45]。そして \mathbb{Z}_4 -grading の構造を持つ supercoset へと拡張することにより $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 超弦理論に対する Yang-Baxter 変形が得られた [46, 47]。例えば、 β 変形された $\mathcal{N} = 4$ SYM 理論 [48] と双対な Lunin-Maldacena 時空 [49] は、 $\mathfrak{su}(2, 2) \times \mathfrak{su}(4)$ の可換な生成子から成る r -行列を用いた Yang-Baxter 変形により導出できる [50]。このように可積分変形は超対称性や共形対称性が部分的に破れた系に対するホログラフィーの解明のために大きな役割を果たしてきた。

可積分変形は AdS/CFT の文脈のみでなく、様々な非線形シグマ模型に適用される。4次元 CS 理論の視点から俯瞰すれば、これらを統一的に扱うことが期待できる。注目すべきは、Riemann 面 C のトポロジーと有理型 1 形式 ω 、そして表面欠陥 (order/disorder defect) 上での境界条件を指定することにより多くの可積分な場の理論が導出される点である。まず、最も単純な主カイラル模型の Yang-Baxter 変形は disorder defect の立場から r -行列を用いた境界条件によって導出された [19]。特に $\mathfrak{su}(2)$ を標的空間に持つ主カイラル模型に対する Yang-Baxter 変形は基づく対称性の違いにより、rational な処方と trigonometric な処方の 2 つの Lax pair が構成されることが知られている [51]。trigonometric 処方を用いるとき Riemann 面 C のトポロジーは円柱になるが、[20] においてこれを 4次元 CS 理論の立場から再導出した。また、構造群を一般の半単純 Lie 群に拡張することで新しいタイプの Yang-Baxter 変形を導出することができる。対称コセットシグマ模型、 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 超弦理論に対する Yang-Baxter 変形は C 上の配位に対しそれぞれ $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_4$ -grading を導入することで得られる [21]。以上の模型は全て disorder defect に基づいて導出されたが、order defect の側面を精緻に解析することも興味深い。Faddeev-Reshetikhin 模型 [52] は $SU(2)$ 主カイラル模型の Poisson 構造を緩和という手法によって ultralocal なものに変形した模型である。[18] において、Faddeev-Reshetikhin 模型を導く条件を同定し、order defect の立場から可積分変形を導出することに初めて成功した。

本論文の構成は以下の通りである。Chapter 2では、標準的な古典可積分性のレビューを与え、可積分変形の性質について述べる。Chapter 3は主に [6, 8, 19] に基づき 4次元 CS 理論の概要を述べ、ツイスト関数と境界条件の果たす役割について議論する。Chapter 4において、[20] に基づき trigonometric 処方による主カイラル模型の Yang-Baxter 変形を 4次元 CS 理論から導出する。また、新しいタイプの Yang-Baxter 変形の構成方法について述べる。Chapter 5は主に [21] の内容であり、対称コセットシグマ模型と $\text{AdS}_5 \times S^5$ 超弦理論、及びこれらの可積分変形の導出に充てられる。特に、 $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_4$ -grading の構造を 4次元 CS 理論に導入する方法について議論する。Chapter 6では [18] に従って Faddeev-Reshetikhin 模型及びその trigonometric 変形を 4次元 CS 理論の立場から導出する。最後に Chapter 7で総括と今後の展望を述べる。Appendix Aは、4次元 CS 理論の境界条件を指定するとき中心的作用を果たす Drinfel'd double や Manin triple についてのレビューである。Appendix Bは Chapter 4で導入された自己同型写像 λ の具体的な構成法について述べる。Appendix Cでは Lax pair の平坦性条件を直接評価することにより、主カイラル模型の新型 Yang-Baxter 変形の可積分性を示す。AdS₃ 主カイラル模型の Yang-Baxter 変形とスケールリング極限については Appendix Dで述べる。Appendix Eにおいては Lie superalgebra $\mathfrak{sl}(4|4)$ を導入し、それを用いて Green-Schwarz 形式の $\text{AdS}_5 \times S^5$ 超弦理論を記述する方法について概略する。Appendix Fでは随伴作用と R -作用素の合成写像である dressed R -作用素の満たす諸々の関係式を証明する。Appendix Gにおいて、対称コセットシグマ模型に対するツイスト関数から出発して \mathbb{Z}_2 -grading を導入しない場合、homogeneous bi-Yang-Baxter 変形された主カイラル模型が得られることを示す。

Chapter 2

古典可積分性

この章では Lax pair を用いて可積分系を特徴付ける手法について説明する。この分野の標準的な文献として、[53–55] などがある。

2.1 Lax pair による可積分系の記述

ある系が与えられた時にその系が Liouville 可積分であることは示すことは一般に容易でない。Liouville 可積分性よりも多くの場合扱いやすい可積分系の特徴づけとして、Lax pair を用いる方法がある。Lax pair を用いた可積分の定義は Liouville 可積分性と強い関連があると同時に、逆散乱法などの様々な解析手法を与える。

2.1.1 Lax pair とモノドロミー行列

ある 2 次元時空 \mathcal{M} 上で定義された場の理論を考える。 \mathcal{M} 上の座標は (τ, σ) で与えられ、その光円錐座標を以下のように定義する。

$$\sigma^\pm := \frac{1}{2}(\tau \pm \sigma), \quad \partial_\pm := \frac{\partial}{\partial \sigma^\pm}. \quad (2.1.1)$$

Lax pair \mathcal{L}_\pm とはある複素 Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値を取る $z \in \mathbb{C}P^1 (:= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ の有理型関数であり、以下の性質を満たすものである。

$$\text{系の運動方程式} \Leftrightarrow \partial_+ \mathcal{L}_-(z) - \partial_- \mathcal{L}_+(z) + [\mathcal{L}_+(z), \mathcal{L}_-(z)] = 0 \quad \text{for } \forall z. \quad (2.1.2)$$

ここで z は **スペクトラルパラメータ** と呼ばれる。右側の条件は on-shell 平坦性条件、もしくは零曲率条件と呼ばれ、(2.1.2) を満たすことが Lax pair を用いた可積分系の定義である。Lax pair の添字 \pm は主カイラル模型などのある可積分系に対しては共変な時空の添字としての意味を持つが、一般にはその限りではない。Lax pair の時間成分、空間成分を便宜上以下のように定義する。

$$\mathcal{L}_\tau := \frac{1}{2}\mathcal{L}_+ + \frac{1}{2}\mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_\sigma := \frac{1}{2}\mathcal{L}_+ - \frac{1}{2}\mathcal{L}_-. \quad (2.1.3)$$

このように形式的に時空の変換性を Lax pair に対して課すことで $\mathcal{L} := \mathcal{L}_+ d\sigma^+ + \mathcal{L}_- d\sigma^-$ を微分 1 形式と見做せる。平坦性条件は

$$(d + \mathcal{L}) \wedge (d + \mathcal{L}) = d\mathcal{L} + \mathcal{L} \wedge \mathcal{L} = 0 \quad (2.1.4)$$

となる。条件 (2.1.4) は次のゲージ変換のもとで不変であることがわかる。

$$\mathcal{L} \mapsto \mathcal{L}^g := g\mathcal{L}g^{-1} - dg g^{-1}. \quad (2.1.5)$$

ここで、 g は M から $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ への滑らかな写像である。以上の概念を導入することにより、微分 1-形式に対する平行移動 (parallel transport) が定義される。

$$U(z; \tau_1, \sigma_1; \tau_0, \sigma_0) := \text{P exp} \int_{(\tau_0, \sigma_0)}^{(\tau_1, \sigma_1)} \mathcal{L}. \quad (2.1.6)$$

ここで P は経路順序 (path-ordering) を表し、 $(\tau_0, \sigma_0), (\tau_1, \sigma_1)$ はそれぞれ始点と終点の座標である。 \mathcal{L} の平坦性条件により平行移動 (2.1.6) は端点を固定した経路の連続変形によって値を変えない。端点の移動に関しては以下の微分方程式を満たす。

$$\partial_{\pm}^1 U^{10}(z) = \mathcal{L}_{\pm}^1 U^{10}(z), \quad \partial_{\pm}^0 U^{10}(z) = -U^{10}(z) \mathcal{L}_{\pm}^0. \quad (2.1.7)$$

ここで添字 0 や 1 は始点と終点を表す。

今、時空 M として空間座標が $\sigma \in [0, L]$ で周期的な系を考える。Lax pair を用いて以下の演算子を定義する。

$$T(z) = \text{P exp} \int_0^L d\sigma \mathcal{L}_{\sigma}(z), \quad (2.1.8)$$

$$M(z) = \mathcal{L}_{\tau}(z)|_{\sigma=0}. \quad (2.1.9)$$

(2.1.8) で定義された演算子 $T(z)$ を**モノドロミー行列** (*monodromy matrix*) と呼ぶ。¹ 積分 (2.1.8) は非可縮な経路を巻いているのでモノドロミー行列 $T(z)$ は非自明な値を取りうる。 $T(z), M(z)$ を用いると平坦性条件 (2.1.4) は

$$\frac{d}{d\tau} T(z) = [M(z), T(z)] \quad (2.1.10)$$

と書き換えられる。ここから直ちに以下の保存チャージ $F_k(z)$ ($k \in \mathbb{Z}_{>0}$) が存在することがわかる。

$$F_k(z) := \text{tr} T^k(z), \quad \frac{d}{d\tau} F_k(z) = 0. \quad (2.1.11)$$

¹モノドロミー行列は可解な格子模型における転送行列 (transfer matrix) に対応している。場の理論、格子模型どちらに対しても可積分性は $T(z)$ の可換性によって特徴付けられる。

$F_k(z)$ は $\mathbb{C}P^1$ 上の有理型関数なので、ある点 $z_0 \in \mathbb{C}P^1$ 周り (例えば $z_0 = \infty$) で Laurent 展開することで無限個の保存チャージを得ることができる。ただし、一般にこれらの保存チャージが独立であるとは限らない。Liouville 可積分性との対応を見るために、これらの保存チャージが包合的 (in involution) であるための条件を調べる。テンソル積の Poisson 括弧 $\{ \otimes \}$ を以下のように定義する。Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に対応する Lie 群 $G^{\mathbb{C}}$ の表現と表現空間 V を定めた時、自己準同型 $\text{End}(V)$ の元 A, B に対し、

$$\{A \otimes B\}^{ik}_{jl} := \{A^i_j, B^k_l\} \quad (2.1.12)$$

と定める。これを用いて、保存チャージ $F_k(z)$ が包合的であるための十分条件は以下の **Sklyanin 関係式** で表せる。²

$$\exists r_{12}(z_1, z_2) \in \text{End}(V \otimes V) \quad \text{s.t.} \quad \{T(z_1) \otimes T(z_2)\} = [r_{12}(z_1, z_2), T(z_1) \otimes T(z_2)]. \quad (2.1.13)$$

この $r_{12}(z_1, z_2)$ は **古典的 r -行列** と呼ばれる。³ここで、下付き添字 1, 2 はテンソル積 $V \otimes V$ の 1 つ目のベクトル空間と 2 つ目のベクトル空間をそれぞれ表していることに注意されたい。Sklyanin 関係式 (2.1.13) は量子可積分系の RTT 関係式の古典極限と考えることができる。実際 (2.1.13) を認めると、関係式

$$\{T^k(z_1) \otimes T^l(z_2)\} = [r_{12}(z_1, z_2), T^k(z_1) \otimes T^l(z_2)] \quad (2.1.14)$$

が成立するため、テンソル積のそれぞれの空間に対してトレースを取ると、

$$\{F_k(z_1), F_l(z_2)\} = 0 \quad (2.1.15)$$

が従う。

ここで、古典 r -行列が **歪対称** (skew-symmetric) に取れることを述べておく。Sklyanin 関係式 (2.1.13) に対してテンソル積の 1 つ目と 2 つ目の空間を入れ替えると、

$$-\{T(z_2) \otimes T(z_1)\} = [r_{21}(z_1, z_2), T(z_2) \otimes T(z_1)] \quad (2.1.16)$$

を得る。左辺の負号は Poisson 括弧の歪対称性による。さらに 2 つのスペクトラルパラメータを交換すると、

$$\{T(z_1) \otimes T(z_2)\} = [-r_{21}(z_2, z_1), T(z_1) \otimes T(z_2)] \quad (2.1.17)$$

²モノドロミー行列の Poisson 括弧がこのように不定性のない形で与えられる系を ultralocal な系と言う。Poisson 構造の ultralocality に関しては Section 2.3 を見よ。

³直積表現 $\text{End}(V \otimes V)$ は多くの文献でしばしば $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ と略記される。

となり、 $-r_{21}(z_2, z_1)$ は $r_{12}(z_1, z_2)$ と同じ Sklyanin 関係式を満たすことがわかる。(2.1.13) と (2.1.17) を足して2で除することで

$$r'_{12}(z_1, z_2) := \frac{r_{12}(z_1, z_2) - r_{21}(z_2, z_1)}{2} \quad (2.1.18)$$

もやはり Sklyanin 関係式を満たす。ここで新しく定義された r -行列 $r'_{12}(z_1, z_2)$ は歪対称性

$$r'_{12}(z_1, z_2) = -r'_{21}(z_2, z_1) \quad (2.1.19)$$

を持つ。以降の議論では特に断りがない限りこのように再定義された r'_{12} を r -行列と呼び、常に歪対称性 (2.1.19) を満たすものとする。

モノドロミー行列を具体的に求めるためには Lax pair の空間成分の経路順序積を計算する必要がある。しかし、その Poisson 括弧に現れる r -行列は Lax pair の Poisson 括弧を計算すれば良い。実際、Sklyanin 関係式 (2.1.13) の十分条件として

$$\begin{aligned} \{\mathcal{L}_\sigma(z'; \sigma_1) \otimes \mathcal{L}_\sigma(z; \sigma_0)\} &= [r_{12}(z', z), \mathcal{L}_\sigma(z'; \sigma_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(z; \sigma_0)] \delta(\sigma_1 - \sigma_0) \\ (\sigma_1 = (\tau_1, \sigma_1), \quad \sigma_0 = (\tau_0, \sigma_0), \quad \tau_1 = \tau_0) \end{aligned} \quad (2.1.20)$$

が与えられる。これは次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} &\{U(z'; \sigma_1; \sigma_0) \otimes U(z; \sigma_1; \sigma_0)\} \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} dudv \left(U(z'; \sigma_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; v) \right) \\ &\quad \cdot \{ \mathcal{L}_\sigma(z'; u) \otimes \mathcal{L}_\sigma(z; v) \} \left(U(z'; u; \sigma_0) \otimes U(z; v; \sigma_0) \right) \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} dudv \delta(u - v) \left(U(z'; \sigma_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; v) \right) \\ &\quad \cdot [r_{12}(z', z), \mathcal{L}_\sigma(z'; u) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(z; v)] \left(U(z'; u; \sigma_0) \otimes U(z; v; \sigma_0) \right) \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} dudv \delta(u - v) \\ &\quad \left[\left(U(z'; \sigma_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; v) \right) r_{12}(z', z) (\partial_u + \partial_v) \left(U(z'; u; \sigma_0) \otimes U(z; v; \sigma_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + (\partial_u + \partial_v) \left(U(z'; \sigma_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; v) \right) r_{12}(z', z) \left(U(z'; u; \sigma_0) \otimes U(z; v; \sigma_0) \right) \right] \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} dudv \delta(u - v) \\ &\quad (\partial_u + \partial_v) \left[\left(U(z'; \sigma_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; v) \right) r_{12}(z', z) \left(U(z'; u; \sigma_0) \otimes U(z; v; \sigma_0) \right) \right] \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} du \partial_u \left[\left(U(z'; \sigma_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; u) \right) r_{12}(z', z) \left(U(z'; u; \sigma_0) \otimes U(z; u; \sigma_0) \right) \right] \end{aligned}$$

$$= [r_{12}(z', z), U(z'; \sigma_1; \sigma_0) \otimes U(z; \sigma_1; \sigma_0)]. \quad (2.1.21)$$

上式において、 $\sigma_1 = L$, $\sigma_0 = 0$ と置けば (2.1.13) を得る。3つ目の等号において、 $U(z; \sigma_1; \sigma_0)$ に対する関係式 (2.1.7) を用いた。

2.1.2 具体例

具体例 1: 主カイラル模型

主カイラル模型 (principal chiral model) とは Lie 群 G の群作用そのものを標的空間にもつ非線形シグマ模型である。主カイラル模型は on-shell 平坦性条件を満たすという意味で可積分であるが、モノドロミー行列 $T(z)$ の Poisson 括弧に ambiguity があるため量子可積分性への拡張が困難であるという問題がある。これは Lax pair の Poisson 構造にデルタ関数の微分項が含まれることに起因しており、このような Poisson 構造を non-ultralocal であると言う。non-ultralocality の問題については Section 2.3 を見よ。

主カイラル模型の作用と Lax pair は以下のように与えられる。

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \eta^{\mu\nu} \text{tr}(j_\mu j_\nu), \quad (2.1.22)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{j^+}{z+1} d\sigma^+ - \frac{j^-}{z-1} d\sigma^-, \\ \Leftrightarrow \mathcal{L}_\mu &= \frac{1}{1-z^2} (j_\mu + z \epsilon_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} j_\rho). \end{aligned} \quad (2.1.23)$$

カレント j_μ は $g \in G$ を用いて $j_\mu := g^{-1} \partial_\mu g$ と定義され、対応する Lie 代数 \mathfrak{g} に値を取る。特に j_μ は大域的な左作用 $g \mapsto gg$ ($g \in G$) に対して不変であり、左不変カレント (left-invariant current) と呼ばれる。ここで $\eta^{\mu\nu} := \text{diag}(-1, +1)$ は 2次元の Minkowski 計量であり、 $\epsilon_{\mu\nu}$ は完全反対称テンソル

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{++} & \epsilon_{+-} \\ \epsilon_{-+} & \epsilon_{--} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & +2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.1.24)$$

である。⁴ g の変分を取ることにより主カイラル模型の運動方程式はカレントの保存則

$$0 = \partial^\mu j_\mu = -\frac{1}{2} (\partial_+ j_- + \partial_- j_+) \quad (2.1.25)$$

であることがわかる。作用 (2.1.22) は群の大域的な右作用 $g \mapsto gg$ ($g \in G$) によって不変であり、 j_μ は対応する Noether カレントである。

⁴Minkowski 時空においては

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{00} & \epsilon_{01} \\ \epsilon_{10} & \epsilon_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_{\tau\tau} & \epsilon_{\tau\sigma} \\ \epsilon_{\sigma\tau} & \epsilon_{\sigma\sigma} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

左不変カレント j_{\pm} は off-shell で恒等的に

$$0 = \partial_+ j_- - \partial_- j_+ + [j_+, j_-] \quad (2.1.26)$$

を満たすことを利用すると、Lax pair の平坦性条件は以下ようになる。

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_+ \mathcal{L}_- - \partial_- \mathcal{L}_+ + [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-] \\ &= -\frac{\partial_+ j_-}{z-1} - \frac{\partial_- j_+}{z+1} + \frac{[j_+, j_-]}{1-z^2} \\ &= \frac{1}{1-z^2} (\partial_+ j_- - \partial_- j_+ + [j_+, j_-]) + \frac{z}{1-z^2} (\partial_+ j_- + \partial_- j_+) \\ &= \frac{z}{1-z^2} (\partial_+ j_- + \partial_- j_+). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

よって、任意の $z \in \mathbb{C}P^1$ に対して Lax pair の平坦性条件 (2.1.4) を満たすことが運動方程式 (2.1.25) と等価であることが示せた。

具体例 2: Sine-Gordon 模型

Sine-Gordon 模型は古典/量子逆散乱法の文脈で解析されてきた模型であり [3]、Bäcklund 変換を用いて N-ソリトン解を得る方法が知られている。

Sine-Gordon 方程式は次のように与えられる。

$$\partial_\tau^2 \varphi - \partial_\sigma^2 \varphi = -\frac{8m^2}{\beta} \sin(2\beta\varphi). \quad (2.1.28)$$

ここで $\varphi = \varphi(\tau, \sigma)$ はスカラー場である。さらにこの運動方程式を与える作用は

$$S = \int_{\mathcal{M}} d\tau d\sigma \frac{1}{2} \left(\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi + \frac{4m^2}{\beta^2} (1 - \cos(2\beta\varphi)) \right) \quad (2.1.29)$$

であることがわかる。運動方程式 (2.1.28) と同値な平坦性条件を導く Lax pair は次のように書ける。

$$\mathcal{L}_\sigma = -i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} \partial_\tau \varphi & m(\lambda e^{i\beta\varphi} - \lambda^{-1} e^{-i\beta\varphi}) \\ m(\lambda e^{-i\beta\varphi} - \lambda^{-1} e^{i\beta\varphi}) & -\frac{\beta}{2} \partial_\tau \varphi \end{pmatrix}, \quad (2.1.30)$$

$$\mathcal{L}_\tau = -i \begin{pmatrix} \frac{\beta}{2} \partial_\sigma \varphi & -m(\lambda e^{i\beta\varphi} + \lambda^{-1} e^{-i\beta\varphi}) \\ -m(\lambda e^{-i\beta\varphi} + \lambda^{-1} e^{i\beta\varphi}) & -\frac{\beta}{2} \partial_\sigma \varphi \end{pmatrix}. \quad (2.1.31)$$

この Lax pair は Pauli 行列 σ_i を用いて

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\sigma &= ik_1 \cos(\beta\varphi) \sigma_1 + ik_0 \sin(\beta\varphi) \sigma_2 - i\frac{\beta}{2} \partial_\tau \varphi \sigma_3, \\ \mathcal{L}_\tau &= ik_0 \cos(\beta\varphi) \sigma_1 + ik_1 \sin(\beta\varphi) \sigma_2 - i\frac{\beta}{2} \partial_\sigma \varphi \sigma_3 \end{aligned} \quad (2.1.32)$$

と書けるため、 $\mathcal{L}_\mu \in \mathfrak{su}(2)$ であることがわかる。ここで新たに定義されたスペクトラルパラメータ

$$k_0 := m \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} \right), \quad k_1 := -m \left(\lambda - \frac{1}{\lambda} \right) \quad (2.1.33)$$

は共変な拘束条件 $k_0^2 - k_1^2 = 4m^2$ を満たす。(2.1.32) の表式はさらに共変な形で書き直すことができる。

$$\mathcal{L}_\mu = ik_\mu \cos(\beta\varphi) \sigma_1 - i\epsilon_{\mu\nu} k^\nu \sin(\beta\varphi) \sigma_2 + i\frac{\beta}{2} \epsilon_{\mu\nu} \partial^\nu \varphi \sigma_3. \quad (2.1.34)$$

Lax pair の平坦性条件は具体的に、

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\tau \mathcal{L}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{L}_\tau + [\mathcal{L}_\tau, \mathcal{L}_\sigma] \\ &= -ik_1 \beta \sin(\beta\varphi) \partial_\tau \varphi \sigma_1 + ik_0 \beta \cos(\beta\varphi) \partial_\tau \varphi \sigma_2 - i\frac{\beta}{2} \partial_\tau^2 \varphi \sigma_3 \\ &\quad + ik_0 \beta \sin(\beta\varphi) \partial_\sigma \varphi \sigma_1 - ik_1 \beta \cos(\beta\varphi) \partial_\sigma \varphi \sigma_2 + i\frac{\beta}{2} \partial_\sigma^2 \varphi \sigma_3 \\ &\quad + 2i\sigma_1 \left(\frac{k_1 \beta}{2} \sin(\beta\varphi) \partial_\tau \varphi - \frac{k_0 \beta}{2} \sin(\beta\varphi) \partial_\sigma \varphi \right) \\ &\quad + 2i\sigma_2 \left(\frac{k_1 \beta}{2} \cos(\beta\varphi) \partial_\sigma \varphi - \frac{k_0 \beta}{2} \cos(\beta\varphi) \partial_\tau \varphi \right) \\ &\quad + 2i\sigma_3 \left(-k_0^2 \cos(\beta\varphi) \sin(\beta\varphi) + k_1^2 \cos(\beta\varphi) \sin(\beta\varphi) \right) \\ &= -i\frac{\beta}{2} \sigma_3 \left(\partial_\tau^2 \varphi - \partial_\sigma^2 \varphi + \frac{16m^2}{\beta} \cos(\beta\varphi) \sin(\beta\varphi) \right) \\ &= -i\frac{\beta}{2} \sigma_3 \left(\partial_\tau^2 \varphi - \partial_\sigma^2 \varphi + \frac{8m^2}{\beta} \sin(2\beta\varphi) \right) \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

と評価できるため、これは正に Sine-Gordon 方程式 (2.1.28) と同値であることがわかる。

Sine-Gordon 模型は ultralocal な Poisson 構造を持つため、Lax pair (2.1.32) によるモノドロミー行列が Sklyanin 関係式 (2.1.13) を満たすことが示せる。この時の $r_{12}(\lambda, \lambda')$ は以下のように求まる [53]。

$$r_{12}(\lambda, \lambda') = \frac{\beta^2}{4} \left(\frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \frac{\lambda\lambda'}{\lambda^2 - \lambda'^2} (\sigma_1 \otimes \sigma_1 + \sigma_2 \otimes \sigma_2) \right) \quad (2.1.36)$$

$$= \frac{\beta^2}{4} \left(\frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{\lambda^2 - \lambda'^2} \sigma_3 \otimes \sigma_3 + \frac{\lambda\lambda'}{\lambda^2 - \lambda'^2} \left((\sigma_1 + i\sigma_2) \otimes (\sigma_1 - i\sigma_2) + (\sigma_1 - i\sigma_2) \otimes (\sigma_1 + i\sigma_2) \right) \right). \quad (2.1.37)$$

この r -行列は確かに歪対称性 (2.1.19) を満たしている。

2.2 Yang-Baxter 方程式

前節において保存チャージが包摂的であるという条件から r -行列が導入された。Poisson 括弧 (2.1.20) は Jacobi 恒等式を満たしているため、現れる r -行列もそれに伴った条件を満たすはずである。そのよう

な r -行列の満たすべき関係式を **Yang-Baxter 方程式**と呼ぶ。Yang-Baxter 方程式は単に可積分系の Poisson 構造を特徴付けるというだけでなく、その代数構造により Section 2.4 で述べる Yang-Baxter 変形の可積分性を保証する。この節では Sklyanin 関係式と Yang-Baxter 方程式の関係を議論し、 R -作用素を導入する。

2.2.1 整合性条件による Yang-Baxter 方程式の導出

Lie 代数 \mathfrak{g} の表現空間 V としたとき $r_{12}(z_1, z_2)$ は $\text{End}(V \otimes V)$ の元であったが、ここではこの表記法を拡張しよう。まず r -行列の成分表示を次のように定義する。

$$r_{12}(z_1, z_2) =: r_{ab}(z_1, z_2) T^a \otimes T^b. \quad (2.2.1)$$

T^a, T^b は $\text{End}(V)$ の生成子である。次にベクトル空間 V 3つの直積空間 $V \otimes V \otimes V$ を考え、それぞれのベクトル空間にラベル $1, 2, 3$ を割り振る。それぞれの空間に作用する r -行列は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} r_{12}(z_1, z_2) &:= r_{ab}(z_1, z_2) T^a \otimes T^b \otimes \mathbf{1}, \\ r_{23}(z_2, z_3) &:= r_{ab}(z_2, z_3) \mathbf{1} \otimes T^a \otimes T^b, \\ r_{31}(z_3, z_1) &:= r_{ab}(z_3, z_1) T^b \otimes \mathbf{1} \otimes T^a. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

言い換えれば、 $1, 2, 3$ でラベルされたベクトル空間を入れ替える操作を同変 (equivariant) 写像とするような r -行列の組み合わせである。

この記法を用いて \mathcal{L}_σ に対する Jacobi 恒等式を評価しよう。以下の式変形では添字 $1, 2, 3$ に対応してスペクトラルパラメータも割り振られるとして $r_{12}(z_1, z_2) = r_{12}$ 等と略記する。

$$\begin{aligned} 0 &= \{ \{ \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3) \} + (\text{cyclic permutations}) \\ &= \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \{ [r_{12}, \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2)] \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3) \} + (\text{cyclic permutations}) \\ &= \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \{ [r_{12} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)], \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \otimes \mathbf{1} \} \\ &\quad - \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_3) [r_{12}, [r_{31}, \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)]] \\ &\quad + \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \delta(\sigma_2 - \sigma_3) [r_{12}, [r_{23}, \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)]] \\ &\quad + (\text{cyclic permutations}) \\ &= \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \{ [r_{12} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)], \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \otimes \mathbf{1} \} \\ &\quad + \delta(\sigma_1 - \sigma_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{31}, r_{12}], \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)] \right. \\ &\quad \left. - [r_{31}, [r_{12}, \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}]] \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{12}, r_{23}], \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)] \right. \\
& \quad \left. + [r_{23}, [r_{12}, \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \otimes \mathbf{1}]] \right) \\
& + (\text{cyclic permutations}). \tag{2.2.3}
\end{aligned}$$

2つ目の等号では

$$\begin{aligned}
\{\mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2)\} & = \delta(\sigma_1 - \sigma_2) [r_{12}, \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2)] \\
& = -\delta(\sigma_1 - \sigma_2) [r_{21}, \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2)] \tag{2.2.4}
\end{aligned}$$

が (r -行列の歪対称性を仮定せずとも) 成立することを用いた。permutation からの寄与を考慮に入れて直積空間の入れ替えを行う。以下では

$$\mathcal{L}_1 := \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1) \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \mathcal{L}_2 := \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2) \otimes \mathbf{1}, \quad \mathcal{L}_3 := \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3) \tag{2.2.5}$$

と言う記法を用いる。(2.2.3) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
0 & = \delta(\sigma_1 - \sigma_2) [\{r_{12} \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_3)\}, \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2] \\
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{31}, r_{12}], \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_3] - [r_{31}, [r_{12}, \mathcal{L}_1]] \right) \\
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{12}, r_{23}], \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3] + [r_{23}, [r_{12}, \mathcal{L}_2]] \right) \\
& + (\text{cyclic permutations}) \\
& = \delta(\sigma_3 - \sigma_1) [\{r_{31}, \mathcal{L}_2\}, \mathcal{L}_3] + \delta(\sigma_2 - \sigma_3) [\{r_{23}, \mathcal{L}_1\}, \mathcal{L}_3] \\
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{23}, r_{31}], \mathcal{L}_3] + [[r_{31}, r_{12}], \mathcal{L}_3] - [r_{23}, [r_{31}, \mathcal{L}_3]] \right) \\
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{23}, r_{31}], \mathcal{L}_3] + [[r_{12}, r_{23}], \mathcal{L}_3] + [r_{31}, [r_{23}, \mathcal{L}_3]] \right) \\
& + (\text{cyclic permutations}) \\
& = \left[\delta(\sigma_3 - \sigma_1) \{r_{31}, \mathcal{L}_2\} + \delta(\sigma_2 - \sigma_3) \{r_{23}, \mathcal{L}_1\}, \mathcal{L}_3 \right] \\
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left([[r_{23}, r_{31}], \mathcal{L}_3] - [r_{23}, [r_{31}, \mathcal{L}_3]] + [r_{31}, [r_{23}, \mathcal{L}_3]] \right) \\
& + \delta(\sigma_1 - \sigma_2)\delta(\sigma_1 - \sigma_3) \left[[r_{31}, r_{12}] + [r_{23}, r_{31}] + [r_{12}, r_{23}], \mathcal{L}_3 \right] \\
& + (\text{cyclic permutations}). \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

ここまで r -行列の歪対称性を仮定せずに式変形を行なったきたことに注意せよ。最後の等号での2行目は交換子に対する Jacobi 恒等式により 0 になる。1行目は r -行列と Lax pair の Poisson 括弧であるが、 r -行列が系を記述する場を含まないならばこの項は消える。逆に、場を含んだ形の r -行列を**動力学的 (dynamical) な r -行列**と呼ぶ。

以上より、非動力学的な r -行列に対して Poisson 括弧の Jacobi 恒等式が成り立つための十分条件は次の通り与えられる。

$$[r_{12}(z_1, z_2), r_{23}(z_2, z_3)] + [r_{23}(z_2, z_3), r_{31}(z_3, z_1)] + [r_{31}(z_3, z_1), r_{12}(z_1, z_2)] = C_{123}. \quad (2.2.7)$$

ここで C_{123} は Lie 代数 \mathfrak{g} の Casimir 演算子 (つまり普遍包絡代数 $U(\mathfrak{g})$ の中心) の $V \otimes V \otimes V$ 上の表現行列である。この直積表現の典型的な基底が $T^a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes T^a$ ($a = 1, \dots, \dim V$) で与えられることを思い出すと、 C_{123} は

$$[C_{123}, T^a \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T^a \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes T^a] = 0, \quad \text{for } \forall T^a \quad (2.2.8)$$

を満たす作用素として定義される。(2.2.8) が成立すれば、(2.2.6) の残りの項が消えることが直ちにわかる。

自明な Casimir 演算子

C_{123} に対する最も自明な選択は $C_{123} = 0$ である。この時 (2.2.7) は次のようになる。

$$[r_{12}(z_1, z_2), r_{23}(z_2, z_3)] + [r_{23}(z_2, z_3), r_{31}(z_3, z_1)] + [r_{31}(z_3, z_1), r_{12}(z_1, z_2)] = 0. \quad (2.2.9)$$

これを **斉次古典 Yang-Baxter 方程式** (*homogeneous classical Yang-Baxter equation*、以下 **hCYBE**) と呼ぶ。

Quadratic Casimir による Casimir 演算子

Lie 代数 \mathfrak{g} が半単純の時、より非自明な Casimir 演算子を考えることができる。まず直積表現空間 $V \otimes V$ に対する quadratic Casimir を次のように定義する。

$$c_{12} := \sum_{a=1}^{\dim V} T^a \otimes T_a. \quad (2.2.10)$$

実際この行列は関係式

$$\begin{aligned} [c_{12}, T^b \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T^b] &= \sum_{a=1}^{\dim V} \left([T^a, T^b] \otimes T_a + T^a \otimes [T_a, T^b] \right) \\ &= \sum_{a,c=1}^{\dim V} f^{abc} (T_c \otimes T_a + T_a \otimes T_c) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

を満たす。ここでの f^{abc} は半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} の構造定数である。 c_{12} の拡張として

$$C_{12} := c_{12} \otimes \mathbf{1} = \sum_{a=1}^{\dim V} T^a \otimes T_a \otimes \mathbf{1}, \quad C_{13} := \sum_{a=1}^{\dim V} T^a \otimes \mathbf{1} \otimes T_a \quad (2.2.12)$$

をとると、 C_{123} として

$$C_{123} := -c^2 [C_{12}, C_{13}] \quad (2.2.13)$$

$$= -c^2 \sum_{a,b,c=1}^{\dim V} f^{abc} T_a \otimes T_b \otimes T_c \quad (2.2.14)$$

とすれば良いことがわかる。ここで $c^2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ である。なぜならば、

$$\begin{aligned} & \left[\sum_{a,b,c=1}^{\dim V} f^{abc} T_a \otimes T_b \otimes T_c, T^d \otimes \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes T^d \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \otimes T^d \right] \\ &= \sum_{a,b,c,e=1}^{\dim V} \left(f^{abc} f_a^{de} T_e \otimes T_b \otimes T_c + f^{abc} f_b^{de} T_a \otimes T_e \otimes T_c + f^{abc} f_c^{de} T_a \otimes T_b \otimes T_e \right) \\ &= \sum_{a,b,c,e=1}^{\dim V} T_a \otimes T_b \otimes T_c \left(f^{ebc} f_e^{da} + f^{aec} f_e^{db} + f^{abe} f_e^{dc} \right) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

と評価できるためである。最後の等号では構造定数に対する Jacobi 恒等式を用いた。この Casimir 演算子 C_{123} を用いると (2.2.7) は次のようになる。

$$[r_{12}(z_1, z_2), r_{23}(z_2, z_3)] + [r_{23}(z_2, z_3), r_{31}(z_3, z_1)] + [r_{31}(z_3, z_1), r_{12}(z_1, z_2)] = -c^2 [C_{12}, C_{13}]. \quad (2.2.16)$$

この関係式は**修正古典 Yang-Baxter 方程式** (*modified classical Yang-Baxter equation*、以下 **mCYBE**) と呼ばれる。

2.2.2 R -作用素

Sklyanin 関係式 (2.1.13) で現れた古典 r -行列を作用素 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の形式で書き直すことを考える。この節では特に r -行列の代数構造に興味があるため、スペクトラルパラメータに依存しない r -行列を扱う。この時、歪対称性は単に $r_{12} = -r_{21}$ となる。

まず線形作用素 $R : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)$ を古典 r -行列を用いて以下のように定義する。

$$R(X) := \langle r_{12}, X \rangle_2, \quad X \in \text{End}(V). \quad (2.2.17)$$

ここで、 \mathfrak{g} の双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \text{End}(V) \times \text{End}(V) \rightarrow \mathbb{C}$ を導入した。添字 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ は直積 $\text{End}(V \otimes V)$ の 2 つ目の成分を双線型形式に代入することを意味する。この線形作用素を R -作用素 (R -operator) と呼ぶ。 r -行列は歪対称性 (2.1.19) を満たす $\text{End}(V \otimes V)$ の元なので、常に

$$r = \sum_i (E_i \otimes E'_i - E'_i \otimes E_i), \quad E_i, E'_i \in \text{End}(V) \quad (2.2.18)$$

の形を取る。従って (2.2.17) は

$$R(X) = \sum_i (E_i \langle E'_i, X \rangle - E'_i \langle E_i, X \rangle) \quad (2.2.19)$$

と表され、 R -作用素での歪対称性は

$$\langle R(X), Y \rangle = -\langle X, R(Y) \rangle, \quad \forall X, Y \in \text{End}(V) \quad (2.2.20)$$

と表現される。ここまでの議論では Lie 代数 \mathfrak{g} の表現を定めていたが、考えている表現が忠実 (faithful) であれば、 R -作用素として $R : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を一意に同定することができる。よって R -作用素の言葉で Yang-Baxter 方程式を表せば、Lie 代数の表現に依らない議論をすることができる。

古典 Yang-Baxter 方程式 (2.2.9), (2.2.16) は R -作用素の言葉で書き直すと以下のようなになる。

$$[R(X), R(Y)] - R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) = -c^2[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}. \quad (2.2.21)$$

これを確かめるために各項を評価しよう。

$$\begin{aligned} [R(X), R(Y)] &= \langle [r_{12}, r_{13}], X \otimes Y \rangle_{23}, \\ -R([R(X), Y]) &= \langle [r_{32}, r_{13}], X \otimes Y \rangle_{23}, \\ -R([X, R(Y)]) &= \langle [r_{12}, r_{23}], X \otimes Y \rangle_{23}, \\ [X, Y] &= \langle [C_{12}, C_{13}], X \otimes Y \rangle_{23}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

ここで双線形形式 $\langle X, Y \rangle_{23}$ は X の第 2, 第 3 の直積部分を $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に代入したものである。特に上の第 2, 3 式において、双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が随伴不変 (adjoint invariant)

$$\langle X, [Y, Z] \rangle + \langle [Y, X], Z \rangle = 0, \quad \forall X, Y, Z \in \text{End}(V) \quad (2.2.23)$$

であることを用いた。今 X, Y は $\text{End}(V)$ の任意の元であるため、(2.2.22) より (2.2.9), (2.2.16) が従う。 c^2 の値として一般に任意の実数が許されるが、 R -作用素の再規格化により常に $|c^2|$ は 0 か 1 に帰着させることができる。

まず、hCYBE (2.2.9) に同値な方程式として、

$$[R(X), R(Y)] - R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) = 0, \quad X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \quad (2.2.24)$$

が与えられる。これが R -作用素に対する **hCYBE** (*homogeneous classical Yang-Baxter equation*) である。mCYBE (2.2.16) の R -作用素による記述は次のように与えられる。

$$[R(X), R(Y)] - R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) = -c^2[X, Y], \quad X, Y \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \quad c^2 \in \{-1, +1\}. \quad (2.2.25)$$

これは R -作用素に対する **mCYBE** (*modified classical Yang-Baxter equation*) である。 R -作用素の規格化は自由に変えられるため、 c の値として ± 1 もしくは $\pm i$ を考えれば良い。 $-c^2 = -1$ ($\Leftrightarrow c = \pm 1$) の時の mCYBE を **split 型**、 $-c^2 = +1$ ($\Leftrightarrow c = \pm i$) の時の mCYBE を **non-split 型** と呼ぶ。⁵

mCYBE の解

半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に対しては以下の **Drinfel'd-Jimbo 型** [56, 57] の古典 r -行列が mCYBE の解であることが知られている。

$$r_{\text{DJ}} = c \sum_{\alpha: \text{simple root}} (E_{-\alpha} \otimes E_{\alpha} - E_{\alpha} \otimes E_{-\alpha}). \quad (2.2.28)$$

ここで $E_{\alpha} \in \mathfrak{g}$ はカルタン標準形に取っている。特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n)$ の時は

$$r_{\text{DJ}} = c \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E_{ij} \otimes E_{ji} - E_{ji} \otimes E_{ij}) \quad (2.2.29)$$

と与えられる。ここで E_{ij} は基本表現で $(E_{ij})_{kl} := \delta_{ik}\delta_{jl}$ と定義される。Drinfel'd-Jimbo 型の r -行列に対応する R -作用素は

$$\begin{aligned} R_{\text{DJ}}(E_{\alpha}) &= -cE_{\alpha} & (\alpha : \text{positive root}) \\ R_{\text{DJ}}(E_{-\alpha}) &= +cE_{\alpha} & (-\alpha : \text{negative root}) \\ R_{\text{DJ}}(H_{\alpha}) &= 0 & (H_{\alpha} : \text{Cartan generator}) \end{aligned} \quad (2.2.30)$$

と作用することが (2.2.17) から従う。

⁵歪対称でない R -作用素を許す時、mCYBE の解 R_m と hCYBE の解 R_h は以下の変換

$$R_h^{\pm} = R_m \pm \text{Id} \quad (2.2.26)$$

によって関係づけることができる。歪対称でない R -作用素に対する Yang-Baxter 方程式は

$$[R(X), R(Y)] - R(-[{}^t R(X), Y] + [X, R(Y)]) = 0 \quad (2.2.27)$$

ここで ${}^t R$ は R の双線形形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対する共役である。 R_m を歪対称 ($\Leftrightarrow {}^t R_m = -R_m$) とすると、 R_h^{\pm} は ${}^t R_h^{\pm} = -R_m^{\pm}$ となり歪対称でなくなることに注意せよ。

hCYBE の解

hCYBE の最も単純な解として可換 r -行列を用いたものがある。すなわち、以下の r -行列を用いて構成される R -作用素である。

$$r = \sum_i (E_i \otimes E'_i - E'_i \otimes E_i), \quad E_i, E'_i \in \text{End}(V) \quad \text{s.t.} \quad \forall E_i, E'_j, \quad [E_i, E'_j] = 0. \quad (2.2.31)$$

その可解性からこの r -行列は自明に hCYBE を満たす。この型の r -行列は任意の Lie 代数 \mathfrak{g} に対して構成でき、特に半単純 Lie 代数に対してはその Cartan 部分代数の元を E_i, E'_i にとれば良い。

より非自明な hCYBE の解として **Jordanian 型** [58, 59] の r -行列がある。これは次のように定義される。

$$\begin{aligned} r_{\text{Jor}} &= \sum_i^n (E_i \otimes E'_i - E'_i \otimes E_i), \quad E_i, E'_i \in \text{End}(V) \\ \text{s.t.} \quad [E_1, E'_1] &= E'_1, \quad [E_1, E_i] = (1 - t_i)E_i, \quad [E_1, E'_i] = t_i E'_i, \quad [E_i, E'_j] = \delta_{ij} E'_j, \\ [E_i, E_j] &= [E'_i, E'_j] = [E'_1, E_i] = [E'_1, E'_i] = 0 \quad i, j = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

ここで $t_i \in \mathbb{C}$ ($i = 2, \dots, n$) は定数である。特に $n = 1$ のとき、Jordanian 型の古典 r -行列は

$$r_{\text{Jor}} = E_1 \otimes E'_1 - E'_1 \otimes E_1, \quad [E_1, E'_1] = E'_1 \quad (2.2.33)$$

という形を取る。

2.3 Poisson 構造の ultralocality

Section 2.1.2 で議論した主カイラル模型をはじめとして、多くの物理的に興味のある模型は non-ultralocal な Poisson 構造を持っている。non-ultralocality とはつまり、Lax pair の Poisson 括弧にデルタ関数だけではなくデルタ関数の微分項が含まれるような性質である。このような Poisson 構造は量子逆散乱法を考える上で重大な問題になる。**量子逆散乱法** (*quantum inverse scattering method*) [1–3] とは、転送行列 (場の理論の場合にはモノドロミー行列) の交換関係を用いて、系のエネルギー固有状態や散乱行列を厳密に求める手法である。多くの成功を収めた量子逆散乱法であるが、non-ultralocal な系に対してはモノドロミー行列の交換関係 (古典論の言葉では Poisson 括弧) に不定性が現れるため、この手法が適用できないというのが長きにわたる問題である。

non-ultralocal な系を取り扱う処方として、J. M. Maillet による r/s -行列による定式化 (Maillet 括弧) がある [60, 61]。この手法により古典論として包含的な無限個の保存チャージが存在することを

示すことができる。しかし、モノドロミー行列の Poisson 括弧が Jacobi 恒等式を満たさなくなるため量子論への拡張は難しい問題となる。

主カイラル模型や対称コセット模型などといった non-ultralocal な系に対し格子正則化を導入し、量子逆散乱法を考える別のアプローチとして、**緩和** (*alleviation*) [52, 62–64] が知られている。緩和という手法は、系の運動方程式を保ったまま Poisson 構造を修正し取扱い易い形にするというものである。これにより上記のストリングシグマ模型と古典的に等価な系に対して量子逆散乱法を適用できるようになる。一般に緩和された Poisson 括弧は縮退しているため、元の系の相空間を制限したものを考えることに対応している。驚くべきことに、この相空間の制限はそれぞれの模型に対する Pohlmeyer 簡約 [65–73] に対応することが指摘されている [62]。SU(2) 主カイラル模型を緩和した模型である Faddeev-Reshetekhin 模型 [52] については Section 6 にて取り扱う。

この節ではモノドロミー行列の Poisson 括弧の不定性及び、 r/s -行列について概観する。

Lax pair の Poisson 括弧として、デルタ関数の 1 階微分までを含むものは一般に次の形を取る。

$$\begin{aligned} \{\mathcal{L}_\sigma(z; \sigma) \otimes \mathcal{L}_\sigma(z'; \sigma')\} &= \tilde{A}_{12}(z, z'; \sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + \tilde{B}_{12}(z, z'; \sigma, \sigma') \partial_{\sigma'} \delta(\sigma - \sigma') + \tilde{C}_{12}(z, z'; \sigma, \sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Poisson 括弧の歪対称性を考慮すると $\tilde{A}_{12}, \tilde{B}_{12}, \tilde{C}_{12}$ は

$$\tilde{A}_{12}(z, z'; \sigma) = -\tilde{A}_{21}(z', z; \sigma), \quad \tilde{B}_{12}(z, z'; \sigma, \sigma') = -\tilde{C}_{21}(z', z; \sigma', \sigma), \quad (2.3.2)$$

という関係を満たすことがわかる。関係式

$$\begin{aligned} &\{U(z'; \sigma'_1; \sigma'_0) \otimes U(z; \sigma_1; \sigma_0)\} \\ &= \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} \int_{\sigma_0}^{\sigma_1} dudv \left(U(z'; \sigma'_1; u) \otimes U(z; \sigma_1; v) \right) \{ \mathcal{L}_\sigma(z'; u) \otimes \mathcal{L}_\sigma(z; v) \} \left(U(z'; u; \sigma'_0) \otimes U(z; v; \sigma_0) \right) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

を思い出し、平行移動 $U(z; \sigma_1; \sigma_0)$ の Poisson 括弧が平行移動の交換子で書けることを要請する。この条件により、 \mathcal{L}_σ の交換関係はさらに次の形に制限されることがわかる [61]。

$$\begin{aligned} \{\mathcal{L}_\sigma(z; \sigma) \otimes \mathcal{L}_\sigma(z'; \sigma')\} &= \left(\partial_\sigma r_{12}(z, z'; \sigma) + [r_{12}(z, z'; \sigma), \mathcal{L}_\sigma(z; \sigma) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(z'; \sigma)] \right. \\ &\quad \left. - [s_{12}(z, z'; \sigma), \mathcal{L}_\sigma(z; \sigma) \otimes \mathbf{1} - \mathbf{1} \otimes \mathcal{L}_\sigma(z'; \sigma)] \right) \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - \frac{1}{2} (s_{12}(z, z'; \sigma) + s_{12}(z, z'; \sigma')) (\partial_\sigma - \partial_{\sigma'}) \delta(\sigma - \sigma'). \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

ここで定義された r/s -行列は以下の対称性を持つ。

$$r_{12}(z, z'; \sigma) = -r_{21}(z', z; \sigma), \quad s_{12}(z, z'; \sigma) = s_{21}(z', z; \sigma). \quad (2.3.5)$$

r -行列は直積空間とスペクトラルパラメータの入れ替えに対して歪対称である一方、 s -行列は対称であることに注意せよ。 r -行列が σ に依存せず ($\partial_\sigma r_{12}(z, z'; \sigma) = 0$)、 $s_{12}(z, z'; \sigma) = 0$ の時、ultralocal な Poisson 括弧 (2.1.20) に帰着することがわかる。上記の Poisson 括弧に対する Jacobi 恒等式が成立するための十分条件として、ultralocal な場合の Yang-Baxter 方程式 (2.2.9) に対応する以下の関係式が導かれる。

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\left[(r+s)_{13}(z, z''; \sigma), (r-s)_{12}(z, z'; \sigma) \right] + \left[(r+s)_{23}(z', z''; \sigma), (r+s)_{12}(z, z'; \sigma) \right] \right. \\
& \left. + \left[(r+s)_{23}(z', z''; \sigma), (r+s)_{13}(z, z''; \sigma) \right] \right) \delta(\sigma - \sigma') \\
& + \{ \mathcal{L}_{\sigma_1}(z; \sigma), (r+s)_{23}(z', z''; \sigma') \} - \{ \mathcal{L}_{\sigma_2}(z; \sigma), (r+s)_{13}(z, z''; \sigma') \}. \tag{2.3.6}
\end{aligned}$$

r/s -行列が非動力学的な時、上式の最終行の寄与は消える。

(2.3.4) を用いて、(2.1.21) (において引数を変更したもの) と同様の手順を追うことにより平行移動 $U(z; \sigma_1; \sigma_0)$ の Poisson 括弧を求めることができる。 $\sigma_1 > \sigma_0$, $\sigma'_1 > \sigma'_0$ の時、これらの Poisson 括弧は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}
& \{ U(z; \sigma_1, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma'_0) \} \\
& = \chi(\sigma; \sigma'_1, \sigma'_0) \left[U(z; \sigma_1, \sigma) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma) (r_{12}(z, z'; \sigma) - s_{12}(z, z'; \sigma)) U(z; \sigma, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma, \sigma'_0) \right]_{\sigma=\sigma_0}^{\sigma=\sigma_1} \\
& \quad + \chi(\sigma; \sigma_1, \sigma_0) \left[U(z; \sigma_1, \sigma) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma) (r_{12}(z, z'; \sigma) + s_{12}(z, z'; \sigma)) U(z; \sigma, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma, \sigma'_0) \right]_{\sigma=\sigma'_0}^{\sigma=\sigma'_1}. \tag{2.3.7}
\end{aligned}$$

特に $\min(\sigma_1, \sigma'_1) > \max(\sigma_0, \sigma'_0)$ の時、さらに

$$\begin{aligned}
& \{ U(z; \sigma_1, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma'_0) \} \\
& = + U(z; \sigma_1, \sigma_{1m}) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma_{1m}) (r_{12}(z, z'; \sigma_{1m}) + \epsilon(\sigma_1 - \sigma'_1) s_{12}(z, z'; \sigma_{1m})) \\
& \quad \cdot U(z; \sigma_{1m}, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma_{1m}, \sigma'_0) \\
& \quad - U(z; \sigma_1, \sigma_{0M}) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma_{0M}) (r_{12}(z, z'; \sigma_{0M}) + \epsilon(\sigma'_0 - \sigma_0) s_{12}(z, z'; \sigma_{0M})) \\
& \quad \cdot U(z; \sigma_{0M}, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma_{0M}, \sigma'_0) \tag{2.3.8} \\
& \left(\sigma_{1m} := \min(\sigma_1, \sigma'_1), \sigma_{0M} := \max(\sigma_0, \sigma'_0) \right)
\end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $\epsilon(\sigma) := \text{sign}(\sigma)$ であり、特性関数 χ は

$$\chi(\sigma; \sigma_1, \sigma_0) := \begin{cases} 1 & \text{if } \sigma_0 < \sigma < \sigma_1 \\ 0 & \text{if } \sigma < \sigma_0 \text{ or } \sigma_1 < \sigma \end{cases} \tag{2.3.9}$$

と定義されている。(2.3.7), (2.3.8) からみて取れるように、これらの平行移動同士の Poisson 括弧は同一区間 ($\sigma_1 = \sigma'_1, \sigma_0 = \sigma'_0$) もしくは隣り合った区間 ($\sigma_1 = \sigma'_0$ あるいは $\sigma_0 = \sigma'_1$) の時、 $\epsilon(\sigma)$ や $\chi(\sigma; \sigma_1, \sigma_0)$ の不連続点での不定性を含む (Fig. 2.3.1)。



Figure 2.3.1: 平行移動 $U(z; \sigma_1, \sigma_0)$ 及び $U(z; \sigma'_1, \sigma'_0)$ の積分領域。同一区間 (左) か隣り合った区間 (右) の場合に Poisson 括弧の不定性が現れる。

この不定性を回避してモノドロミー行列の Poisson 括弧を定義するために、所謂 point-splitting を用いて正則化を行う必要がある。今、行列に値を取る関数

$$\Delta^{(1)}(z, z'; \sigma_1, \sigma_0, \sigma'_1, \sigma'_0) := \{U(z; \sigma_1, \sigma_0) \otimes U(z'; \sigma'_1, \sigma'_0)\} \quad (2.3.10)$$

を定義する。Poisson 括弧の歪対称性と Leibniz 則を保ちつつ、不連続点 $\sigma_1 = \sigma'_1$ での値を定めるためには次のように対称に point-splitting を行えば良いことがわかる [61]。

$$\begin{aligned} & \Delta^{(1)}(z, z'; \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1, \sigma'_0) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \left(\Delta^{(1)}(z, z'; \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1 - \epsilon, \sigma'_0) + \Delta^{(1)}(z, z'; \sigma_1, \sigma_0, \sigma_1 + \epsilon, \sigma'_0) \right). \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

これは $\chi(\sigma; \sigma_1, \sigma_0)$ の不連続点において $1/2$ を当てることに対応している。この正則化を施すことにより、モノドロミー行列の Poisson 括弧は (2.3.7) を用いると次のように得られる。

$$\begin{aligned} \{T(z_1), T(z_2)\} &= [r_{12}(z_1, z_2), T(z_1) \otimes T(z_2)] \\ &+ (T(z_1) \otimes \mathbf{1}) s_{12}(z_1, z_2) (\mathbf{1} \otimes T(z_2)) - (\mathbf{1} \otimes T(z_2)) s_{12}(z_1, z_2) (T(z_1) \otimes \mathbf{1}). \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

右辺の第2項と第3項は S^1 の \mathbb{R} への持ち上げの任意性に由来する。つまり、空間方向の S^1 を1周する経路を \mathbb{R} に持ち上げた時に $\sigma_1 = L, \sigma_0 = 0$ のモノドロミーとの Poisson 括弧に寄与するのは

$$(\sigma'_1, \sigma'_0) = (L, 0), (0, -L), (2L, L) \quad (2.3.13)$$

の3通りである。上記の1,2,3番目の選択がそれぞれ (2.3.12) の右辺第1,2,3項目に対応している。

しかしながら、この正則化の手順によりモノドロミー行列に対する Jacobi 恒等式が成立しなくなってしまうことがわかる。実際、(2.3.12) を用いて Jacobi 恒等式を計算すると、その十分条件として次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned}
0 = & \left(\left[r_{13}(z, z''; \sigma), r_{12}(z, z'; \sigma) \right] + \left[r_{23}(z', z''; \sigma), r_{12}(z, z'; \sigma) \right] \right. \\
& \left. + \left[r_{23}(z', z''; \sigma), r_{13}(z, z''; \sigma) \right] \right) \delta(\sigma - \sigma') \\
& + \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}_{\sigma 1}(z; \sigma), (r+s)_{23}(z', z''; \sigma') \} - \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}_{\sigma 2}(z; \sigma), (r+s)_{13}(z, z'); \sigma' \} \\
& + \frac{1}{2} \{ \mathcal{L}_{\sigma 3}(z; \sigma), (r+s)_{12}(z, z'); \sigma' \}. \tag{2.3.14}
\end{aligned}$$

これは条件 (2.3.6) とは両立しない。\$r\$-行列が非動力的でかつ \$s_{12} = 0\$ (つまり ultralocal) の時 (2.3.6) と (2.3.14) は共に hCYBE (2.2.9) に帰着することに注意せよ。

この困難は“弱い意味” (*in the weak sense*) での⁶正則化を導入することで解決することができる。弱い括弧とは Poisson 括弧の数 \$n\$ に依って正則化が定義された括弧であり、内側に含まれる Poisson 括弧単体で意味を持たない。\$n\$ 重の Poisson 括弧を

$$\begin{aligned}
& \Delta^{(n)} \left(z^{(1)}, \dots, z^{(n+1)}; \sigma_1^{(1)}, \sigma_0^{(1)}, \dots, \sigma_1^{(n+1)}, \sigma_0^{(n+1)} \right) \\
& := \left\{ U \left(z^{(1)}, \sigma_1^{(1)}, \sigma_0^{(1)} \right) \otimes \left\{ \dots \otimes \left\{ U \left(z^{(n)}, \sigma_1^{(n)}, \sigma_0^{(n)} \right) \otimes U \left(z^{(n+1)}, \sigma_1^{(n+1)}, \sigma_0^{(n+1)} \right) \right\} \dots \right\} \right\} \tag{2.3.15}
\end{aligned}$$

と置くと、やはり同一区間と隣り合う区間を考える時に不連続性が現れる。Jacobi 恒等式を成立させつつ、不連続点で \$\Delta^{(n)}\$ の正則化を与えるためには次のような完全対称化によって弱い括弧を定義すれば良い。

$$\begin{aligned}
& \Delta^{(n)} \left(z^{(1)}, \dots, z^{(n+1)}; \sigma_1, \sigma_0^{(1)}, \dots, \sigma_1, \sigma_0^{(n+1)} \right) \\
& = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{(n+1)!} \sum_{p \in S_{n+1}} \Delta^{(n)} \left(z^{(1)}, \dots, z^{(n+1)}; \sigma_1 + p(1)\epsilon, \sigma_0^{(1)}, \dots, \sigma_1 + p(n+1)\epsilon, \sigma_0^{(n+1)} \right). \tag{2.3.16}
\end{aligned}$$

ここで \$S_{n+1}\$ は \$n+1\$ 次対称群である。Jacobi 恒等式に関与するのは \$\Delta^{(2)}\$ であることがわかる。ここでの \$\Delta^{(1)}\$ は (2.3.11) のものと一致していることに注意せよ。古典論としては、このように弱い括弧を定義することにより包摂的な無限個の保存チャージが存在することを示すことができる。つまり、次の関係式が成立する。

$$\{ \text{tr } T(z)^n \otimes \text{tr } T(z')^m \} = nm \text{tr}_{12} \left(T(z) \otimes T(z') \cdot \{ T(z) \otimes T(z') \} \right)$$

⁶ ここでの「弱い」という言葉遣いは拘束系に対する Hamilton 力学における弱い等号とは何の関係もない。

$$\begin{aligned}
&= nm \operatorname{tr}_{12} \left[r_{12}(z, z') + s_{12}(z, z'), T(z)^n \otimes T(z')^m \right] \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{2.3.17}$$

以上の r/s -行列を用いた定式化により non-ultralocal な系に対しても古典可積分性を示すことができたが、これらの議論を量子論に拡張し量子逆散乱法を適用するためには弱い意味での Poisson 括弧では不十分である。

主カイラル模型の Poisson 構造

具体例として主カイラル模型 (2.1.22) の Poisson 構造 [74] を調べよう。Lie 代数 \mathfrak{g} の生成子の表現行列を T^a として、次のように規格化及び交換関係を定義する。

$$\operatorname{tr} (T_a T_b) =: \kappa_{ab}, \quad [T^a, T^b] = f^{ab}{}_c T^c. \tag{2.3.18}$$

(2.1.22) における左不変カレント j はこの基底を用いて $j = \sum_a j^a T_a$ と書け、それぞれの成分は次の形を取る。

$$j_\mu^a = e_M^a \partial_\mu X^M. \tag{2.3.19}$$

ここで M は標的空間の添字である。 X^M は標的空間への埋め込み関数であり、 $e_M^a(X^N)$ は多脚場とみなせる。よって標的空間の計量は次のように書ける。

$$G_{MN} = e_M^a e_N^b \kappa_{ab}. \tag{2.3.20}$$

これらの変数を用いると off-shell 平坦性条件 (2.1.26) かより次の関係式が従う。

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_\tau j_\sigma - \partial_\sigma j_\tau + [j_\tau, j_\sigma] \\
&= \left[\partial_\tau (e_M^c \partial_\sigma X^M) - \partial_\sigma (e_M^c \partial_\tau X^M) + e_M^a \partial_\tau X^M e_N^b \partial_\sigma X^N f_{ab}{}^c \right] T_c \\
&= \left[\partial_N e_M^c \partial_\tau X^N \partial_\sigma X^M - \partial_N e_M^c \partial_\sigma X^N \partial_\tau X^M + e_M^a e_N^b f_{ab}{}^c \partial_\tau X^M \partial_\sigma X^N \right] T_c,
\end{aligned} \tag{2.3.21}$$

\Rightarrow

$$\partial_N e_M^a - \partial_M e_N^a + e_N^b e_M^c f_{bc}{}^a = 0. \tag{2.3.22}$$

ここでは X^M を基礎的な力学変数としてその共役運動量との Poisson 括弧を指定しよう。⁷ G -主カ

⁷左不変カレント j_σ^a を基礎的な力学変数に取る方法もここでの結果と等価な結果を与える [54, 75–77]。この時 off-shell 平坦性条件 (2.1.26) を用いると

$$\partial_\tau j_\sigma^a = \partial_\sigma j_\tau^a + [j_\tau, j_\sigma] =: \nabla_\sigma j_\tau^a \tag{2.3.23}$$

であるので、正準共役運動量を次のようにして Poisson 括弧を定める。

$$\pi^a := \frac{\delta S}{\delta(\partial_\tau j_\sigma^a)} = -(\nabla_\sigma^{-1} j_\tau)^a. \tag{2.3.24}$$

イラル模型の作用は X^m を用いると次のようにかける。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \eta^{\mu\nu} e_M^a \partial_\mu X^M e_N^b \partial_\nu X^N \kappa_{ab} \\ &= -\frac{1}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \eta^{\mu\nu} G_{MN} \partial_\mu X^M \partial_\nu X^N. \end{aligned} \quad (2.3.25)$$

よって力学変数 X^M に対する正準共役運動量は

$$\Pi_M := e_M^a \kappa_{ab} e_N^b \partial_\tau X^N = e_M^a \kappa_{ab} j_\tau^b \quad (2.3.26)$$

で与えられるため、課すべき Poisson 括弧は以下の通りである。

$$\{X^M(\sigma), \Pi_N(\sigma')\} = \delta^M_N \delta(\sigma - \sigma') \quad \Leftrightarrow \quad \{X^M(\sigma), \partial_\tau X^N(\sigma')\} = G^{MN} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.3.27)$$

これを用いるとカレント j_τ, j_σ の間の Poisson 括弧が次のように計算できる。

$$\{j_\sigma^a(\sigma), j_\sigma^b(\sigma')\} = 0, \quad (2.3.28)$$

$$\begin{aligned} \{j_\tau^a(\sigma), j_\sigma^b(\sigma')\} &= \kappa^{ab} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') + \kappa^{ac} e_c^M(\sigma) \partial_N e_M^b(\sigma) \partial_\sigma X^N(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - \kappa^{ac} e_c^M(\sigma) \partial_M e_N^b(\sigma) \partial_\sigma X^N(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \kappa^{ab} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') + j_\sigma^c f^a_{cd} \kappa^{db} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

$$\{j_\tau^a(\sigma), j_\tau^b(\sigma')\} = j_\tau^c f^a_{cd} \kappa^{db} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.3.30)$$

ここで滑らかな関数 $f(\sigma)$ に対して成り立つ関係式

$$f(\sigma') \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') = f(\sigma) \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') + \partial_\sigma f(\sigma) \delta(\sigma - \sigma') \quad (2.3.31)$$

及び (2.3.22) を用いた。以上のカレント間の Poisson 代数を用いると Lax pair (2.1.23) の Poisson 括弧を同定することができる。

$$\begin{aligned} \left\{ \mathcal{L}_\sigma^a(z; \sigma), \mathcal{L}_\sigma^b(z'; \sigma') \right\} &= \frac{\kappa^{ab}(z+z')}{(1-z^2)(1-z'^2)} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + \frac{z+z'}{(1-z^2)(1-z'^2)} j_\sigma^c(\sigma) f^a_{cd} \kappa^{db} \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad + \frac{zz'}{(1-z^2)(1-z'^2)} j_\tau^c(\sigma) f^a_{cd} \kappa^{db} \delta(\sigma - \sigma') \\ &= \frac{\kappa^{ab}(z+z')}{(1-z^2)(1-z'^2)} \partial_\sigma \delta(\sigma - \sigma') \\ &\quad - \frac{z'^2}{(1-z'^2)(z-z')} \mathcal{L}_\sigma^c(z) f^a_{cd} \kappa^{db} \delta(\sigma - \sigma') \end{aligned}$$

$$- \frac{z^2}{(1-z^2)(z-z')} \mathcal{L}_\sigma^c(z') f^a{}_{cd} \kappa^{db} \delta(\sigma - \sigma'). \quad (2.3.32)$$

この Poisson 構造は [78, 79] のものと確かに一致する。(2.3.4) と見比べると、主カイラル模型に対する r/s -行列は次のように与えられる [80]。

$$s_{12}(z, z') = - \frac{1}{2} \frac{z + z'}{(1-z^2)(1-z'^2)} \kappa_{ab} T^a \otimes T^b, \quad (2.3.33)$$

$$r_{12}(z, z') = - \frac{1}{2} \frac{z^2 + z'^2 - 2z^2 z'^2}{(z-z')(1-z^2)(1-z'^2)} \kappa_{ab} T^a \otimes T^b. \quad (2.3.34)$$

これらは確かに対称性 $r_{12}(z, z') = -r_{21}(z', z)$, $s_{12}(z, z') = s_{21}(z', z)$ を満たしている。

2.4 可積分変形

可積分系を系統的に得る手法として、可積分変形が知られている。可積分変形とはある可積分系が与えられたときに、その可積分性を保ったまま系を変形するパラメータを導入することである。例えば、主カイラル模型に対する可積分変形として **Yang-Baxter 変形** (以下 YB 変形) や λ 変形が知られている。YB 変形とは、Yang-Baxter 方程式 (2.2.24), (2.2.25) を満たす R -作用素の代数構造を利用して作用と対応する Lax pair を変形する手法である。この章では例として主カイラル模型と対称コセットシグマ模型に対する YB 変形について述べる。

2.4.1 主カイラル模型に対する Yang-Baxter 変形

R -作用素を用いて、主カイラル模型 (2.1.22) の YB 変形された作用は以下のように与えられる。

$$S^{(\eta)} = - \frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu}) \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr} \left(j_\mu \frac{1}{1 - \eta R} j_\nu \right). \quad (2.4.1)$$

演算子 $1/(1 - \eta R)$ は $1 - \eta R$ の逆演算子であり、 R は mCYBE あるいは hCYBE を満たす R -作用素である。特に光円錐座標では以下のように書ける。

$$S^{(\eta)} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr} \left(j_- \frac{1}{1 - \eta R} j_+ \right). \quad (2.4.2)$$

変形カレント (deformed current)

$$J_\pm := \frac{1}{1 \mp \eta R} j_\pm \quad (2.4.3)$$

を導入すると、作用 (2.4.2) は

$$S^{(\eta)} = \frac{1}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr}(j_- J_+) = \frac{1}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr}(J_- j_+) \quad (2.4.4)$$

と書き直せる。作用 (2.4.1) は標的空間の添字に対して反対称な成分が入っているため、非自明な NS-NS 2 形式の背景を含んでいることに注意せよ。

対称性

変形前の主カイラル模型 ($\eta = 0$) には大域的 left 対称性と大域的 right 対称を持っていた。つまり、 G -主カイラル模型の作用は変換

$$\text{left symmetry : } \quad g \mapsto g_L \cdot g, \quad g_L \in G, \quad (2.4.5)$$

$$\text{right symmetry : } \quad g \mapsto g \cdot g_R, \quad g_R \in G \quad (2.4.6)$$

のもとで不変である。特に左不変カレント j_μ そのものは大域的 left 対称性の元であることがすぐにわかる。この意味で、主カイラル模型は“カイラル対称性” $G_L \times G_R$ を持っている。しかし、YB 変形された作用には左不変カレントに R -作用素が当たった形で含まれているため right 対称性 G_R が破れ、対称性は G_L のみになる。

運動方程式

運動方程式を求めるために作用の変分として $\delta g = g\epsilon$ ($\epsilon \in G$) を考える。この変換のもとで左不変カレント j_μ の変分は

$$\delta j_\mu = \partial_\mu \epsilon + [j_\mu, \epsilon] \quad (2.4.7)$$

となる。ここで、関係式 $\delta(g^{-1}) = -g^{-1}(\delta g)g^{-1} = -\epsilon g^{-1}$ を用いた。この変分の下で作用 (2.4.1) は

$$\delta S^{(\eta)} = -\frac{1}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr}(\mathcal{E}\epsilon) \quad (2.4.8)$$

と変化する。ここで、 \mathcal{E} は

$$\mathcal{E} := \partial_+ J_- + \partial_- J_+ - \eta([R(J_+), J_-] + [J_+, R(J_-)]) \quad (2.4.9)$$

と定義される。よって YB 変形された主カイラル模型の運動方程式は次の形となる。

$$\mathcal{E} = 0. \quad (2.4.10)$$

Lax pair

変形されたカレント J を次のように定義する。

$$J_\pm := \frac{1}{1 \mp \eta R} j_\pm. \quad (2.4.11)$$

これを用いると、主カイラル模型に対する Lax pair は次のように与えられる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pm}^{(\eta,c)}(z; \sigma) &= \left(\frac{1 \pm c^2 \eta^2 z}{1 \pm z} \mp \eta R \right) J_{\pm} \\ &= \frac{1}{1 \pm z} \left(1 \mp \frac{\eta z (-c^2 \eta \pm R)}{1 \mp \eta R} \right) j_{\pm}.\end{aligned}\tag{2.4.12}$$

実際この Lax pair に対する平坦性条件は運動方程式 (2.4.10) と等価であることがわかる。左不変カレントに対する off-shell 平坦性条件は

$$\begin{aligned}0 &= \partial_+ j_- - \partial_- j_+ + [j_+, j_-] \\ &=: \mathcal{Z} \\ &= \partial_+ J_- - \partial_- J_+ - \eta([R(J_+), J_-] - [J_+, R(J_-)]) \\ &\quad + [J_+, J_-] - \eta^2([R(J_+), R(J_-)] - R([R(J_+), J_-] + [J_+, R(J_-)])) + \eta R(\mathcal{E})\end{aligned}\tag{2.4.13}$$

であり、mCYBE(2.2.25) を用いると次のよう書ける。

$$\mathcal{Z} = \partial_+ J_- - \partial_- J_+ - \eta([R(J_+), J_-] - [J_+, R(J_-)]) + (1 + \eta^2 c^2)[J_+, J_-] + \eta R(\mathcal{E})\tag{2.4.14}$$

この表記を用いると、Lax pair に対する平坦性条件は次のように評価される。

$$\begin{aligned}\partial_+ \mathcal{L}_-^{(\eta,c)} - \partial_- \mathcal{L}_+^{(\eta,c)} + [\mathcal{L}_-^{(\eta,c)}, \mathcal{L}_+^{(\eta,c)}] \\ = \frac{1}{1 - z^2} \mathcal{Z} + \frac{z}{1 - z^2} (1 - \eta^2 c^2) \mathcal{E} - \frac{z^2}{1 - z^2} [\eta^2 c^2 \mathcal{Z} + (1 - \eta^2 c^2) \eta R(\mathcal{E})].\end{aligned}\tag{2.4.15}$$

$\mathcal{Z} = 0$ を考慮すると、確かに $\mathcal{L}^{(\eta,c)}$ に対する平坦性条件は運動方程式 (2.4.10) と等価であることがわかる。

2.4.2 対称コセットシグマ模型

この節では対称コセットシグマ模型を導入する。対称コセット模型は主カイラル模型と同じく等質な標的空間を持つ非線形シグマ模型であるが、主カイラル模型との決定的な違いは群作用 G が非自明な固定部分群 H を持ちうるという点である。

まず、Lie 代数 G に対し (外部) 自己同型写像 $\sigma : G \rightarrow G$ を定義する。ここで σ は対合 (つまり $\sigma^2 = \text{Id}_G$) でもあるとする。 σ は自己同型なので、 σ の固定点の集合 $H := \{h \in G \mid \sigma(h) = h\}$ は部分群になる。 G の部分群 H による剰余類 $M := G/H$ を **対称コセット空間** (*symmetric coset space*) と呼ぶ。今 Lie 群 G を生成する Lie 代数を \mathfrak{g} とし、 σ から誘導された \mathfrak{g} 上の自己同型写像 $\tilde{\sigma} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を導

入する。 $\tilde{\sigma}$ はやはり対合であるため、その固有値は ± 1 となる。よって \mathfrak{g} はベクトル空間として次のように直和分解できる。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, \quad (2.4.16)$$

$$\mathfrak{h} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \tilde{\sigma}(x) = +1\}, \quad \mathfrak{m} := \{x \in \mathfrak{g} \mid \tilde{\sigma}(x) = -1\}.$$

\mathfrak{h} は $\tilde{\sigma}$ の固定点の集合であるため、 \mathfrak{h} の生成する空間は H であり、 \mathfrak{m} の生成する空間は M である。 $\tilde{\sigma}$ が自己同型であることを思い出すと、部分空間 \mathfrak{h} と \mathfrak{m} は以下の性質を満たすことがわかる。

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}. \quad (2.4.17)$$

例えば \mathfrak{h} に grading 0 を、 \mathfrak{m} に grading 1 を割り振ると上の代数は 2 を法として \mathbb{Z}_2 -grading の構造を持っている。対称コセットとはこのような \mathbb{Z}_2 -grading の構造を持っている剰余類であると言い換えることもできる。代表的な対称コセットを Table 2.1 に与える。対合 σ は基本表現で定義されており、 $I_{1,n} := \text{diag}(-1, +1, \dots, +1)$ である。

M	G	H	σ
S^n	$SO(n+1)$	$SO(n)$	$\sigma(g) := I_{1,n}gI_{1,n}$
AdS_n	$SO(2, n-1)$	$SO(1, n-1)$	$\sigma(g) := I_{1,n}gI_{1,n}$
\mathbb{RP}^n	$SO(n+1)$	$S(O(1) \times O(n))$	$\sigma(g) := I_{1,n}gI_{1,n}$

Table 2.1: 対称コセット空間の例と対応する対合 σ

ここでコセット空間への射影演算子を定義しよう。今 \mathfrak{g} の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ のもとでの直交基底 T^a をとる。このうち最初の $\dim(\mathfrak{m})$ 個を \mathfrak{m} の生成子にとると、射影演算子 $P: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ は次のように定義される。

$$\mathfrak{g} \ni x \mapsto P(x) := \sum_{a=1}^{\dim(\mathfrak{m})} \frac{\langle T^a, X \rangle}{\langle T^a, T^a \rangle} T^a. \quad (2.4.18)$$

対称コセットシグマ模型 (*symmetric coset sigma model*) とは対称コセット空間を標的空間にもつ非線形シグマ模型である。その作用は次のように与えられる。

$$\begin{aligned} S &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \eta^{\mu\nu} \text{tr}(j_\mu P(j_\nu)) \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \text{tr}(k_\mu k^\mu). \end{aligned} \quad (2.4.19)$$

ここで、内積を $\text{tr}(\cdot, \cdot)$ と取り、左不変カレント j の \mathfrak{m} への射影を

$$k_\mu := P(j_\mu) \quad (2.4.20)$$

と定義した。 j_μ の \mathfrak{h} 成分を A_μ と定義すると、左不変カレントは次のように分解される。

$$j_\mu = P(j_\mu) + A_\mu = k_\mu + A_\mu. \quad (2.4.21)$$

対称性

主カイラル模型は大域的な $G_L \times G_R$ -対称性を持っていたが、対称コセットシグマ模型は局所的な H -対称性を持っている。 \mathfrak{h} に値を取る関数 $h: \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{m}$ を考えると、局所的な右 H -変換は次のように表される。

$$g \mapsto g \cdot h, \quad g \in \mathfrak{g}, \quad (2.4.22)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow j_\mu &\mapsto j'_\mu = h^{-1} g^{-1} (\partial_\mu g \cdot h + g \cdot \partial_\mu h) \\ &= h^{-1} j_\mu h + h^{-1} \partial_\mu h \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

ここで、共変微分 D_μ を

$$D_\mu g := \partial_\mu g - g A_\mu \quad (2.4.24)$$

と定義すると、それぞれの場に対する変換則は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} A_\mu &\mapsto A'_\mu = h^{-1} A_\mu h + h^{-1} \partial_\mu h, \\ k_\mu &\mapsto k'_\mu = h^{-1} k_\mu h, \\ D_\mu g &\mapsto D'_\mu g' = \partial_\mu g \cdot h + g \partial_\mu h - g A_\mu h - g \partial_\mu h \\ &= D_\mu g \cdot h. \end{aligned} \quad (2.4.25)$$

この変換則を踏まえると、 $D_\nu g, k_\nu$ に対する共変微分は次のように定義するのが自然である。

$$\begin{aligned} D_\mu D_\nu g &:= \partial_\mu D_\nu g - (D_\nu g) A_\mu, \\ D_\mu k_\nu &:= \partial_\mu k_\nu + [A_\mu, k_\nu]. \end{aligned} \quad (2.4.26)$$

$D_\mu g$ の定義を思い出すと、 j_μ の \mathfrak{h} 成分 k_μ は次のように表せる。

$$k_\mu = g^{-1} D_\mu g \quad \Leftrightarrow \quad D_\mu g = g k_\mu. \quad (2.4.27)$$

これらの表記を用いると作用 (2.4.19) は

$$S = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr} (g^{-1} D_\mu g \cdot g^{-1} D^\mu g) \quad (2.4.28)$$

と書き直せる。この表式を見ると、作用は変換 (2.4.24), (2.4.25) のもとで不変であることがわかる。 g の物理的な自由度は $M = G/H$ に制限されているので、この意味で (2.4.24) はゲージ変換とみなすことができる。以上より、対称コセットシグマ模型は $G_L \times G_R$ 対称性のうち、 G_R の部分群 H をゲージ化したものとも考えることもできる。

運動方程式

作用 (2.4.19) に対し変分 $\delta g = g\epsilon$ を取ることにより、次の運動方程式が得られる。

$$D_\mu D^\mu g - D_\mu g \cdot g \cdot D^\mu g = 0. \quad (2.4.29)$$

これは k_μ を用いて次のように書き換えられる。

$$D^\mu k_\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_\mu k^\mu + [A_\mu, k^\mu] = 0. \quad (2.4.30)$$

G_L に対応する Noether カレント \check{j} は次のように与えられる。

$$\check{j}_\mu := -2D_\mu g \cdot g^{-1} = -2gk_\mu g^{-1}. \quad (2.4.31)$$

実際、このカレントは保存則

$$\partial_\mu \check{j}^\mu = 0 \quad (2.4.32)$$

を満たすことが運動方程式を用いて確かめられる。

さらに Noether カレント (2.4.32) は off-shell 平坦性条件を満たすことがわかる。 \check{j} に対する場の強さを求めると、

$$\partial_\mu \check{j}_\nu - \partial_\nu \check{j}_\mu + [\check{j}_\mu, \check{j}_\nu] = -2g(D_\mu k_\nu - D_\nu k_\mu)g^{-1} \quad (2.4.33)$$

となるが、右辺は左不変カレントに対する恒等式により消えることがわかる。

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_\mu j_\nu - \partial_\nu j_\mu + [j_\mu, j_\nu] \\ &= \partial_\mu k_\nu - \partial_\nu k_\mu + [k_\mu, A_\nu] + [A_\mu, k_\nu] + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [k_\mu, k_\nu] + [A_\mu, A_\nu] \\ &= D_\mu k_\nu - D_\nu k_\mu + \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [k_\mu, k_\nu] + [A_\mu, A_\nu] \end{aligned} \quad (2.4.34)$$

において、grading が 1 の成分は最初の 2 項であるため、この部分が単体で 0 となる。以上より、

$$\partial_\mu \check{j} - \partial_\nu \check{j}_\mu + [\check{j}_\mu, \check{j}_\nu] = 0 \quad (2.4.35)$$

が従う。保存則 (2.4.32) と off-shell 平坦性条件 (2.4.35) を満たすカレントが存在することがわかったため、対称コセット模型に対する Lax pair は主カイラル模型の Lax pair (2.1.23) において j を \check{j} に置き換えれば得られる。

\mathbb{Z}_2 -grading 構造を利用した Lax pair

主カイラル模型とのアナロジーで得られた Lax pair の他に、対称コセットの grading が明白な形の Lax pair を構成することもできる。この構成法は \mathbb{Z}_4 -grading などを持つより一般のコセットにも応用することができる。grading を見やすくするために以下の記法を導入しよう。

$$j^{(0)} := A = j - P(j), \quad j^{(2)} := k = P(j). \quad (2.4.36)$$

Lax pair はこれらを用いて次のように与えられる。

$$\mathcal{L}_{\pm}(z; \sigma) = j_{\pm}^{(0)} + z^{\pm 1} j_{\pm}^{(2)}. \quad (2.4.37)$$

この平坦性条件を示すために、 $j^{(0)}$ と $j^{(1)}$ を用いて運動方程式を書き換えよう。運動方程式 (2.4.30) は

$$\partial_+ j_-^{(2)} + \partial_- j_+^{(2)} + [j_+^{(0)}, j_-^{(2)}] - [j_+^{(2)}, j_-^{(0)}] = 0 \quad (2.4.38)$$

と書ける。一方、恒等式 $\partial_+ j_- - \partial_- j_+ + [j_+, j_-] = 0$ を grading ごとに書くと、

$$\begin{aligned} \partial_+ j_-^{(0)} - \partial_- j_+^{(0)} + [j_+^{(0)}, j_-^{(0)}] + [j_+^{(2)}, j_-^{(2)}] &= 0, \\ \partial_+ j_-^{(2)} - \partial_- j_+^{(2)} + [j_+^{(0)}, j_-^{(2)}] + [j_+^{(2)}, j_-^{(0)}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.39)$$

であるため、運動方程式の同値な書き方として

$$\begin{aligned} \partial_+ j_-^{(2)} + [j_+^{(0)}, j_-^{(2)}] &= 0, \\ \partial_- j_+^{(2)} - [j_+^{(2)}, j_-^{(0)}] &= 0 \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

が得られる。

Lax pair (2.4.37) に対するの場の強さは次のように評価される。

$$\begin{aligned} \partial_+ \mathcal{L}_- - \partial_- \mathcal{L}_+ + [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-] &= \partial_+ j_-^{(0)} - \partial_- j_+^{(0)} + [j_+^{(0)}, j_-^{(0)}] + [j_+^{(2)}, j_-^{(2)}] \\ &\quad + z^{-1} \left(\partial_+ j_-^{(2)} + [j_+^{(0)}, j_-^{(2)}] \right) + z^{+1} \left(-\partial_- j_+^{(2)} + [j_+^{(2)}, j_-^{(0)}] \right). \end{aligned} \quad (2.4.41)$$

第 1 行目は恒等的に消えるため、Lax pair の平坦性条件が運動方程式 (2.4.40) と等価であることが直ちに確かめられる。

2.4.3 対称コセットシグマ模型の Yang-Baxter 変形

この節では対称コセットシグマ模型 (2.4.19) の YB 変形を議論する。変形された作用は次の通りである。

$$S^{(\eta)} = -\frac{1}{2} (\eta^{\mu\nu} - \epsilon^{\mu\nu}) \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \operatorname{tr} \left(j_{\mu} P \circ \frac{1}{1 - \eta R_g \circ P} j_{\nu} \right) \quad (2.4.42)$$

ここで、dressed R -作用素 R_g は次のように定義されている。

$$R_g(x) := g^{-1}R(gxg^{-1})g = \text{Ad}_g^{-1} \circ R \circ \text{Ad}_g(x), \quad x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \quad g \in G. \quad (2.4.43)$$

R は mCYBE もしくは hCYBE を満たす R -作用素である。また、随伴作用 $\text{Ad}_g : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は

$$x \mapsto \text{Ad}_g(x) := gxg^{-1} \quad (2.4.44)$$

と与えられる。主カイラル模型の時と同様に、後の便利のために変形されたカレント \tilde{J} を定義しておこう。

$$\tilde{J}_{\pm} := \frac{1}{1 \mp \eta R_g \circ P} j_{\pm}. \quad (2.4.45)$$

この変形されたカレントを用いると作用 (2.4.42) は次のように書ける。

$$S^{(\eta)} = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \text{tr} \left(j_- P(\tilde{J}_+) \right) = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \text{tr} \left(j_+ P(\tilde{J}_-) \right). \quad (2.4.46)$$

対称性

R -作用素が左不変カレントに作用した時、大域的な left 対称性は保たれる一方 right 対称性は明らかに破られる。主カイラル模型の場合は R -作用素がそのまま左不変カレントに作用していたため、 G_R -対称性が破れていたことを思い出そう。しかし、今のコンベンションでは対称コセットシグマ模型の right 対称性はゲージ化されているため、これを破ってしまうと模型の可積分性を明らかに破ってしまう。これを避けるために作用 (2.4.42) では R -作用素の代わりに dressed R -作用素を用いている。随伴作用 Ad_g は左不変カレント $g^{-1}dg$ を右不変カレント $dg g^{-1}$ へと移すため、(2.4.42) においては G_L -対称性が部分群へと破れることがわかる。変形前の対称コセットシグマ模型の持っていた局所的 H -対称性は確かに保たれている。

運動方程式

主カイラル模型の YB 変形の時と同様に作用 (2.4.42) は変分 $\delta g = g\epsilon$ のもとの

$$\delta S^{(\eta)} = \int d\tau \wedge d\sigma \text{tr} \left(\tilde{\mathcal{E}}\epsilon \right) \quad (2.4.47)$$

と変化する。ここで $\tilde{\mathcal{E}}$ は

$$\tilde{\mathcal{E}} := \partial_+ P(\tilde{J}_-) + \partial_- P(\tilde{J}_+) + \left[\tilde{J}_+, P(\tilde{J}_-) \right] + \left[\tilde{J}_-, P(\tilde{J}_+) \right] \quad (2.4.48)$$

と定義されている。よって YB 変形された対称コセットシグマ模型の運動方程式は次の通りである。

$$\tilde{\mathcal{E}} = 0. \quad (2.4.49)$$

Lax pair

YB 変形された対称コセットシグマ模型の Lax pair は次のように与えられる。

$$\tilde{\mathcal{L}}_{\pm}^{(\eta,c)}(z; \sigma) = \tilde{j}_{\pm}^{(0)} + z^{\pm 1} \sqrt{1 - \eta^2 c^2} \tilde{j}_{\pm}^{(2)} \quad (2.4.50)$$

j の時と同様に、変形されたカレント \tilde{J} の射影は $\tilde{J}^{(0)} := \tilde{J} - P(\tilde{J})$, $\tilde{J}^{(2)} := P(\tilde{J})$ と定義されている。hCYBE に基づいた R -作用素を用いるとき $c = 0$ であるため、Lax pair (2.4.50) は変形前の Lax pair (2.4.37) において j を \tilde{J} に置き換えたものであることがわかる。

上記の Lax pair の平坦性条件が運動方程式 (2.4.49) と等価であることを示そう。 j に対する off-shell 平坦性条件 $\partial_+ j - \partial_- j_+ + [j_+, j_-] = 0$ を変形されたカレント \tilde{J} を用いて表すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{Z}} &:= \partial_+ \tilde{J} - \partial_- \tilde{J}_+ + [\tilde{J}_+, \tilde{J}_-] \\ &= \partial_+ \tilde{J}_- - \partial_- \tilde{J}_+ + [\tilde{J}_+, \tilde{J}_-] + \eta R_g(\tilde{\mathcal{E}}) \\ &\quad + \eta^2 \left([R_g(P(\tilde{J}_+)), R_g(P(\tilde{J}_-))] - R_g \left([R_g(P(\tilde{J}_+)), P(\tilde{J}_-)] + [P(\tilde{J}_+), R_g(P(\tilde{J}_+))] \right) \right) \\ &= \partial_+ \tilde{J}_- - \partial_- \tilde{J}_+ + [\tilde{J}_+, \tilde{J}_-] + \eta R_g(\tilde{\mathcal{E}}) - \eta^2 c^2 [P(\tilde{J}_+), P(\tilde{J}_-)]. \end{aligned} \quad (2.4.51)$$

随伴作用 Ad_g は自己同型であるため、 R_g もやはり mCYBE もしくは hCYBE を満たしていることを用いた。この条件を各 grading に分解すると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned} 0 = \mathcal{Z}^{(0)} &:= \partial_+ \tilde{J}_-^{(0)} - \partial_- \tilde{J}_+^{(0)} + [\tilde{J}_+^{(0)}, \tilde{J}_-^{(0)}] + (1 - P) \left(\eta R_g(\tilde{\mathcal{E}}) \right) + (1 - \eta^2 c^2) [\tilde{J}_+^{(2)}, \tilde{J}_-^{(2)}] \\ 0 = \mathcal{Z}^{(2)} &:= \partial_+ \tilde{J}_-^{(2)} - \partial_- \tilde{J}_+^{(2)} + [\tilde{J}_+^{(0)}, \tilde{J}_-^{(2)}] + [\tilde{J}_+^{(2)}, \tilde{J}_-^{(0)}] + P \left(\eta R_g(\tilde{\mathcal{E}}) \right) \end{aligned} \quad (2.4.52)$$

ここで恒等式 (2.4.52) の第 2 式を用いると、次の関係が従う。

$$\tilde{\mathcal{E}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_+ \tilde{J}_-^{(2)} + [\tilde{J}_+^{(0)}, \tilde{J}_-^{(2)}] = 0 \quad \text{and} \quad \partial_- \tilde{J}_+^{(2)} - [\tilde{J}_+^{(2)}, \tilde{J}_-^{(0)}] = 0. \quad (2.4.53)$$

最後に、Lax pair (2.4.50) に対する場の強さは次のように評価できる。

$$\begin{aligned} \partial_+ \tilde{\mathcal{L}}_-^{(\eta,c)} - \partial_- \tilde{\mathcal{L}}_+^{(\eta,c)} + [\tilde{\mathcal{L}}_+^{(\eta,c)}, \tilde{\mathcal{L}}_-^{(\eta,c)}] &= \mathcal{Z}^{(0)} - (1 - P) \left(\eta R_g(\tilde{\mathcal{E}}) \right) \\ &\quad - z^{+1} \sqrt{1 - \eta^2 c^2} \left(\partial_- \tilde{J}_+^{(2)} - [\tilde{J}_+^{(2)}, \tilde{J}_-^{(0)}] \right) \\ &\quad + z^{-1} \sqrt{1 - \eta^2 c^2} \left(\partial_+ \tilde{J}_-^{(2)} - [\tilde{J}_+^{(0)}, \tilde{J}_-^{(2)}] \right). \end{aligned} \quad (2.4.54)$$

(2.4.53) の表式を考慮すると、任意の z に対する Lax pair の平坦性条件と運動方程式が同値であることが従う。

Chapter 3

4次元 Chern-Simons 理論

Lax pair を用いた可積分性の定式化は on-shell 平坦性条件 (2.1.4) と Yang-Baxter 方程式 (2.2.9) を用いて行われた。ゲージ理論の立場からこれらの性質を系統的に導き、様々な可積分系を統一する試みが **4次元 Chern-Simons 理論** (以下 4次元 CS 理論) である [4–8, 81]。

3.1 位相的場の理論と可積分格子模型

3次元の Chern-Simons 理論は位相的場の理論 (topological field theory) であることが知られている。3次元多様体 \mathcal{M}_3 上の Chern-Simons 理論の作用はゲージ場 A を用いて以下のように与えられる。

$$S_{CS_3} = \frac{k}{4\pi} \int_{\mathcal{M}_3} \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (3.1.1)$$

量子論的には Chern-Simons レベル k が整数値を取る限り S_{CS_3} はゲージ不変である。この理論は作用に計量が入らないため (フレーミングアノマリーを法として) 位相的な場の理論である。 A に対する変分を取るにより運動方程式

$$0 = dA + A \wedge A =: F(A) \quad (3.1.2)$$

を得る。これはゲージ不変で位相的な理論であることから示唆される。Lax pair による可積分性の定義が on-shell 平坦性条件で与えられることを思い出すと、運動方程式が接続 $d + A$ の平坦性条件となる Chern-Simons 理論 (3.1.1) と同じ性質を持つように見える。しかし、可積分系を特徴付けるのに重要なスペクトラルパラメータ $z \in \mathbb{C}P^1$ の構造が通常の Chern-Simons 理論には組み込まれていない。素朴には A が値を取る Lie 代数 \mathfrak{g} をループ代数 $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[z, z^{-1}]$ に拡張するために、新たな座標 z を導入すれば良いように思える。K. Costello [4] はこれを最も単純な形で実現し、さらに Chern-Simons 理論の位相的性質を一部引き継ぐことで Yang-Baxter 関係式を満たすことを示唆した。その作用は

$$S = \frac{i}{4\pi\hbar} \int_{\mathcal{M} \times C} \omega \wedge \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (3.1.3)$$

で与えられ、 $\omega = \varphi(z)dz$ は正則な複素微分 1 形式である。 \mathcal{M} 、 C をそれぞれ “位相平面” (topological plane)、“正則平面” (holomorphic plane) と呼び座標 (τ, σ) 、 (z, \bar{z}) が貼られている。作用はゲージ自由度

$$A \mapsto A + \chi dz \quad (3.1.4)$$

を持つため、ゲージ場 A の成分は

$$A = A_{\bar{z}}d\bar{z} + A_{\tau}d\tau + A_{\sigma}d\sigma \quad (3.1.5)$$

と表せる。複素座標 z に対するゲージ場が存在しないため、理論は正則平面 C 方向の位相不変性をあらわに破っているが、位相平面 \mathcal{M} 方向の微分同相不変性は保たれている。今 \hbar は質量次元 -1 を持っているため、この理論は power-counting により一見くりこみ不可能に見える。しかし、ゲージ不変な局所作用素が全て消えるという性質があるため発散を伴う項は全て運動方程式で消えてしまう [4,5]。またこれに伴い、ゲージ固定を施したのちに摂動論を展開すると理論が赤外自由になる。さらに \mathcal{M} 方向の微分同相不変性を考慮すると、Wilson ラインの期待値が局所的な手続きのみで計算できるという性質がある。¹

以下では tree レベル (古典論レベル) の計算により古典 r -行列と Yang-Baxter 方程式が再現されるか概観しよう。以下では $C = \mathbb{C}$ を考える。計量を $ds^2 = -d\tau^2 + d\sigma^2 + |dz|^2$ と固定し、ゲージ固定

$$g^{\mu\nu} \partial_{\mu} A_{\nu} = -\frac{\partial}{\partial \tau} A_{\tau} + \frac{\partial}{\partial \sigma} A_{\sigma} + 4\frac{\partial}{\partial z} A_{\bar{z}} = 0 \quad (3.1.6)$$

を施すと、プロパゲータは次のようになる。

$$\langle A_{\mu}(\tau, \sigma, z) A_{\nu}(\tau', \sigma', z') \rangle = \frac{4\pi\hbar}{i} \sum_a T^a \otimes T^a \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} g^{\rho\sigma} \frac{\partial}{\partial x^{\sigma}} \left(\frac{1}{-(\tau - \tau')^2 + (\sigma - \sigma')^2 + |z - z'|^2} \right). \quad (3.1.7)$$

ここで T^a は Lie 代数 \mathfrak{g} の生成子であり、 $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ は 4 次元の完全反対称テンソルである。Lie 群 G の表現 ρ を 1 つ定めた時に、Wilson ラインは

$$W(K_z) = \text{tr} \left(\text{P exp} \int_{K_z} A \right) \quad (3.1.8)$$

と定義される。Figure 3.1.1 (a) のように直交した 2 本の Wilson ラインの期待値は次のように評価される。

$$\langle W(K_1) W(K_2) \rangle = \mathbf{1} + \int d\sigma d\tau \langle A_{\tau}(\tau, \sigma_0, z) A_{\sigma}(\tau_0, \sigma, z') \rangle + \mathcal{O}(\hbar^2)$$

¹これに対して、通常の 3 次元の Chern-Simons 理論は power-counting によりくりこみ可能であるため、このような局所的な描像は従わない。

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} \frac{\sum_a T^a \otimes T^a}{z - z'} + \mathcal{O}(\hbar^2) \\
&= \mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r(z - z') + \mathcal{O}(\hbar^2).
\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

この $r(z, z') := \sum_a T^a \otimes T^a / (z - z')$ は rational クラスの可積分な格子模型に対する古典 r -行列である。Figure 3.1.1 (b) のように交差しない2つの Wilson ラインの期待値は $\mathbf{1}$ になることがわかる。これは4次元 CS 理論が赤外自由かつ M 方向に微分同相不変であることを反映しており、摂動の全ての次数で成立する。このような Wilson ラインを格子状に配置することにより、可積分格子模型を得る

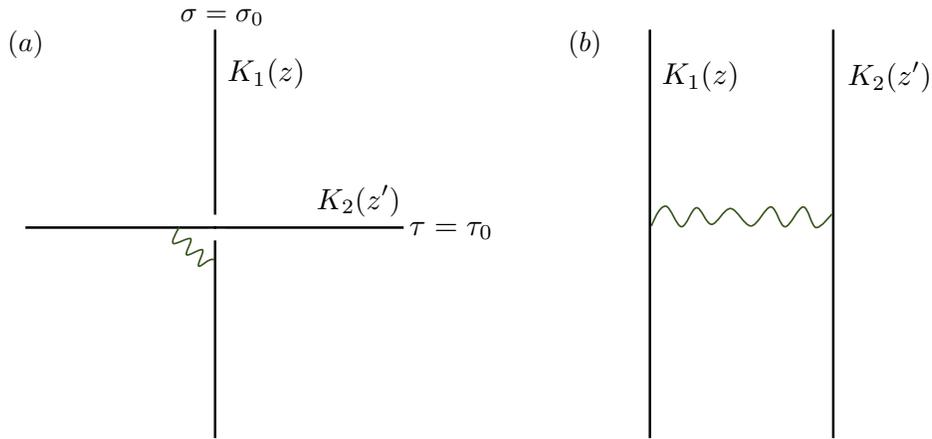


Figure 3.1.1: Wilson ライン間の相互作用。赤外自由性のため (b) の寄与は 0 になる。

ことが出来る。格子模型の可積分性を示すためには頂点上の力学変数 r が Yang-Baxter 方程式を満たす必要がある。

M 方向の微分同相不変性は Wilson ラインを z を変えずに自由に動かして良いことを意味する。つまり、期待値

$$\langle W(K_1(z))W(K_2(z'))W(K_3(z'')) \rangle \tag{3.1.10}$$

が Figure 3.1.2 のどちらの配置でも変わらないことを意味する。ここで経路 K_z は正則平面内の座標を z に固定した位相平面方向に広がった曲線である。Wilson ライン (3.1.10) の非自明かつ leading のオーダーは \hbar^2 であるが、これを Figure 3.1.2 の左右それぞれについて評価すると次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
&\left(\mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r_{12}(z - z') \right) \left(\mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r_{23}(z' - z'') \right) \left(\mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r_{13}(z - z'') \right) \\
&= \left(\mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r_{13}(z - z'') \right) \left(\mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r_{23}(z' - z'') \right) \left(\mathbf{1} + \frac{4\pi\hbar}{i} r_{12}(z - z') \right) + \mathcal{O}(\hbar^3)
\end{aligned}$$

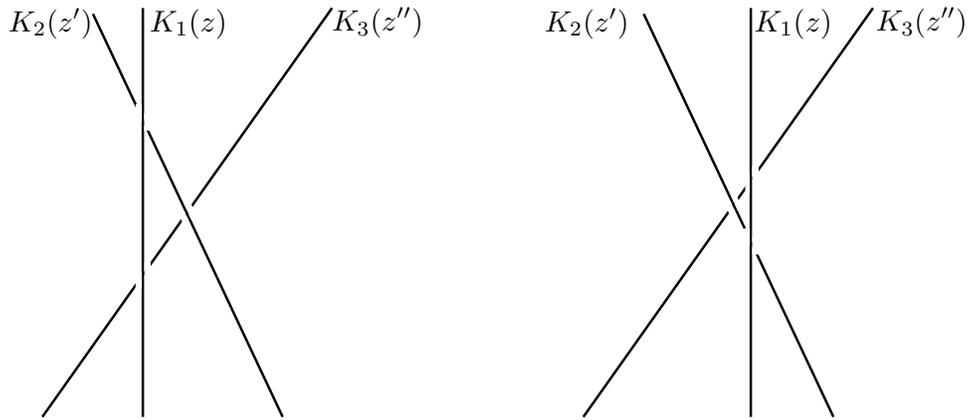


Figure 3.1.2: 3つの Wilson ラインの配置。 \mathcal{M} 方向の微分同相不変性により左右どちらの配置でも (3.1.10) は変わらない。

$$\Rightarrow [r_{12}(z - z'), r_{13}(z - z'')] + [r_{13}(z - z''), r_{23}(z' - z'')] + [r_{12}(z - z'), r_{23}(z' - z'')] = 0. \quad (3.1.11)$$

これはまさしく古典 Yang-Baxter 方程式 (2.2.9) である。

3.2 場の理論の導出

4次元 CS 理論の枠組みでは2次元の格子模型は線作用素の格子上に物理的自由度が乗っていた。格子模型の拡張として素朴に場の理論を取り扱うならば、格子間隔 $a \rightarrow 0$ の熱力学極限を取り扱えば良い。場の理論が局在する2次元の表面欠陥として、以下の2つのクラスを考える。

1. *Order defect*: バルクのゲージ場と結合した新たな自由度を表面欠陥上に導入する。
2. *Disorder defect*: 複素微分1形式 ω として有理型のものを取り、その極上にゲージ場の自由度を局在させる。

4次元空間 $\mathcal{M} \times C$ の模式図は Figure 3.2.1 に示す。

上で述べた熱力学極限は order defect に対応すると考えられる [8]。3.1章でみたように、2次元の格子模型は $z = z_0, z = z_1$ に局在した Wilson ラインを位相平面内で直行する格子状に配置することで得られた。格子間隔を無限小にする極限では、これらは $z = z_0, z = z_1$ に局在した2種類の表面欠陥になるはずである。この手続きを踏んで2次元の場の理論を得ることは興味深い問題ではあるが、そのような極限操作は慎重に取り扱う必要がある。本論文では以降、order defect を考える際は熱力学極限というよりはむしろ、2次元の表面欠陥そのものを出発点として議論を行う。

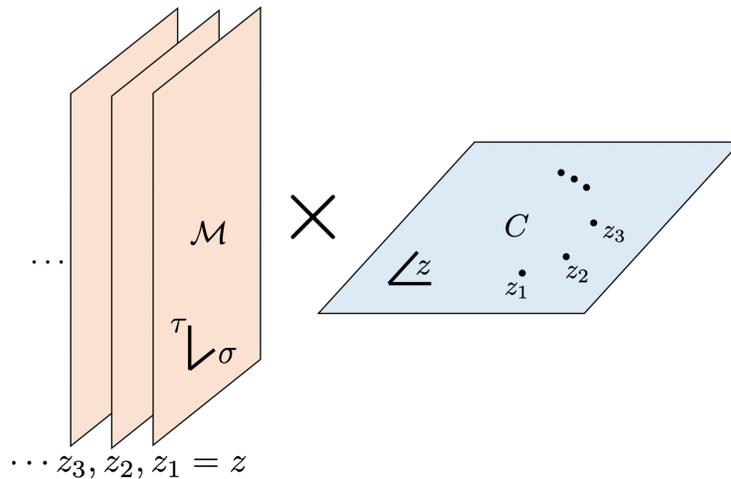


Figure 3.2.1: 4次元空間 $\mathcal{M} \times C$ の模式図。表面欠陥 $z = z_1, z_2, \dots$ 上に2次元の可積分模型が局在する。

disorder defect は格子模型とは全く異なるアプローチの表面欠陥である。このとき有理型1形式 ω は零点を持つ。Riemann-Roch の定理により、 ω の零点/極の位数の和をそれぞれ n_z, n_p とすると $n_z - n_p = 2g - 2$ という関係がある。ここで g は Riemann 面 C の種数である。例えば rational クラス模型を扱うときは $C = \mathbb{C}$ であるため $g = 0$ である。さらに Section 3.3 の例では位数1の極が2つ、位数2の極が1つ、位数1の零点が2つであるため、 $n_p = 4, n_z = 2$ となっている。order defect の時、ゲージ場 A の自由度はゲージ自由度によって消えていた。しかし disorder defect の場合は極の数が増えるため、極上で課される境界条件が増えてゲージ変換で消えない自由度が残る。これが disorder defect から2次元の可積分な場の理論に簡約したときに残る物理的自由度となる。

ω に零点がある時、Section 3.1 で述べた摂動論的な解析はその零点上で破綻することに注意せよ。なぜならば、作用 (3.1.3) において $\omega \rightarrow 0$ は摂動論における展開パラメータが $\hbar \rightarrow \infty$ の極限と等価だからである。あるいはこの事実はゲージ場 A が ω の極上で特異的な振る舞いをすることを意味する。そうでなければ $\omega = 0$ となる点で作用が縮退し、運動方程式が意味を持たなくなってしまう。disorder defect は零点や極の上での取り扱いを慎重に行わなければならない一方、境界条件を変形することにより可積分変形を導出することが出来るなど、豊富な構造を持っている。

[28] において、order defect から導出される模型は ultralocal に、disorder defect から導出される系は non-ultralocal になることが示唆されている。特に、4次元 CS 理論の作用に含まれる $\omega = \varphi(z)dz$ の $\varphi(z)$ は可積分模型のツイスト関数に対応している。ツイスト関数とは Lax pair の Poisson 括弧に現れるスペクトラルパラメータ z に依存した関数である。(詳しくは Section 6.1.2 を参照せよ。) 以

下では order defect の視点から 2 次元の可積分模型およびその Lax pair が導出される機構を概観する。Section 3.3 では C が rational なときに、disorder defect 上の境界条件を変形する手順を述べる。Chapter 4, Chapter 5 では disorder defect を、Chapter 6 においては order defect の側面を詳しく解析する。

Order defect

表面欠陥として $z = z_\alpha$ ($\alpha = 1, \dots, n$) に order defect を導入した時の作用は次のように与えられる。

$$S_{\text{order}} = \frac{i}{4\pi\hbar} \int_{\mathcal{M} \times C} dz \wedge CS(A) + \sum_{\alpha=1}^n \frac{i}{2\hbar} \int_{\mathcal{M} \times \{z_\alpha\}} \mathcal{L}_\alpha(\phi_\alpha; A_+|_{z_\alpha}, A_-|_{z_\alpha}). \quad (3.2.1)$$

ここで、

$$CS(A) := \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (3.2.2)$$

である。さらに光円錐座標 $\sigma^\pm := (\tau \pm \sigma)/2$ に対応してゲージ場の光円錐座標表示

$$A_\pm := A_\tau \pm A_\sigma \quad (3.2.3)$$

を導入した。ゲージ固定条件 (3.1.6) において、 C の体積が小さい極限 ($g_{z\bar{z}} \rightarrow 0$) を考えると次のようになる。²

$$g^{z\bar{z}} \partial_z A_{\bar{z}} = 0. \quad (3.2.4)$$

このゲージ固定条件の元ではゲージ場のプロパゲータは $A_+ A_-$ 成分のみを持ち、これが古典 r -行列を与える。

$$\int d\sigma^+ d\sigma^- \langle A_{a+}(z) A_{b-}(z') \rangle \propto \hbar r_{ab}(z, z'). \quad (3.2.5)$$

Section 3.1 と同様に摂動論の tree レベルの解析を行おう。作用 (3.2.1) において特に次の形を仮定する。

$$\sum_{\alpha}^{n_+ + n_-} \mathcal{L}_\alpha(\phi_\alpha; A_+, A_-) = \sum_{\alpha=1}^{n_+} \mathcal{L}^\alpha(\phi_\alpha; A_-) + \sum_{\alpha=1}^{n_-} \overline{\mathcal{L}}^\beta(\phi_\beta; A_+), \quad (3.2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\alpha(\phi_\alpha; A_-) &= \mathcal{L}^\alpha(\phi_\alpha) + J_+^\alpha A_- \quad (\alpha = 1, \dots, n_+), \\ \overline{\mathcal{L}}^\beta(\phi_\beta; A_+) &= \overline{\mathcal{L}}^\beta(\phi_\beta) + \overline{J}_-^\beta A_+ \quad (\beta = 1, \dots, n_-). \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

今、表面欠陥上の自由度 J_-^α, J_+^β と ϕ_α, ϕ_β を残してバルクのゲージ場の自由度を integrate out する。プロパゲータが $\langle A_+ A_- \rangle$ 成分しかないため、ゲージ場の 3 点バーテックス ($\propto \epsilon^{\mu\nu\rho} A_\mu A_\nu A_\rho$) を含む寄

² このゲージは特異的であるために量子論のレベルでは機能しないが、古典論のレベルの計算では有効な条件である。

与は値を持ち得ない。つまり \hbar^1 のオーダーで効くのは2つの表面欠陥の間に1つのプロパゲータが飛ぶものだけである。よって得られる作用は次のようになる。

$$S_{2d}^{\text{eff}} = \frac{i}{2\hbar} \int_{\mathcal{M}} \left[\sum_{\alpha=1}^{n_+} \mathcal{L}^\alpha(\phi_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{n_-} \mathcal{L}^\beta(\phi_\beta) + \sum_{\alpha=1}^{n_+} \sum_{\beta=1}^{n_-} r_{ab}(z_\alpha - z'_\beta) J_{+a}^\alpha \bar{J}_{-b}^\beta \right]. \quad (3.2.8)$$

次に表面欠陥の外の点 $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_\alpha\}$ において次の $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値をとる1形式を定義する。

$$\mathcal{L}^{4d} := A_+ d\sigma^+ + A_- d\sigma^-. \quad (3.2.9)$$

ゲージ場に対する運動方程式 $\partial_+ A_- - \partial_- A_+ + [A_+, A_-] = 0$ から直ちにこの1形式が平坦性条件

$$d\mathcal{L}^{4d} + \mathcal{L}^{4d} \wedge \mathcal{L}^{4d} = 0 \quad (3.2.10)$$

を満たすことがわかる。 \mathcal{L}^{4d} からゲージ場 A を integrate out して得られる作用素を \mathcal{L}^{2d} と定義する。当然 \mathcal{L}^{2d} も平坦性条件

$$d\mathcal{L}^{2d} + \mathcal{L}^{2d} \wedge \mathcal{L}^{2d} = 0 \quad (3.2.11)$$

を満たす。作用を求めた時と同様に tree レベルで寄与するのは $z (\notin \{z_\alpha\})$ に位置する \mathcal{L}^{4d} と z_α に位置する表面欠陥を1つのプロパゲータが結ぶダイアグラムのみである。よって \mathcal{L} は次のように求まる。

$$\mathcal{L}^{2d} = \sum_{\alpha=1}^{n_+} J_+^\alpha(z_\alpha) r(z_\alpha, z) d\sigma^+ + \sum_{\beta=1}^{n_-} \bar{J}_-^\beta(z_\beta) r(z, z_\beta) d\sigma^-. \quad (3.2.12)$$

これが on-shell で平坦性条件を満たす (3.2.8) の Lax pair に対応する。

注意すべきなのは、(3.2.8) の運動方程式から \mathcal{L}^{2d} の平坦性条件は従うが、逆はその限りでないということである。極端な例として、 $J_+^\alpha, \bar{J}_-^\beta$ と ϕ_α, ϕ_β が完全に別の力学変数で書かれていた場合が挙げられる。この場合 (3.2.8) の変分を0に置くことにより、(3.2.11) は従うが、 ϕ_α, ϕ_β に関する運動方程式は平坦性条件 (3.2.8) からは得られない。

3.3 Disorder defect による可積分変形

F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro, B. Vicedo らは2次元の可積分な場の理論とその可積分変形を系統的に導出する方法を示した [19]。可積分変形のパラメータは disorder defect に対する4次元CS理論の運動方程式を慎重に取り扱うことで導入することができる。3.3章ではこの手続きを [19] に基づきレビューする。

3.3.1 運動方程式

$G^{\mathbb{C}}$ を複素化された半単純 Lie 群とし、対応する Lie 代数を $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ とする。非縮退な対称双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}$ を、随伴不変であるように定義する。つまり、双線型形式は

$$\langle B, [C, D] \rangle = -\langle [C, B], D \rangle \quad (3.3.1)$$

を満たす。以下では、 $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ 上で定義された $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値を取るゲージ場 A を考える。ここで \mathcal{M} は 2次元 Minkowski 空間で、座標と計量は $x^i = (x^0, x^1) = (\tau, \sigma)$ と $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, +1)$ で与えられる。 $\mathbb{C}P^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の大域的な正則座標は z で書く。この $\mathbb{C}P^1$ という幾何が rational class の可積分系を特徴付けることがわかる。

[19] に従い、4次元 CS 理論の作用を

$$S[A] = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge CS(A) \quad (3.3.2)$$

で与える。³ ここで ω 有理型微分 1 形式で、

$$\omega := \varphi(z) dz \quad (3.3.3)$$

と定義される。 φ は $\mathbb{C}P^1$ 上の有理系関数である。注目すべきことに、 φ は可積分な場の理論の Poisson 構造を特徴付けるツイスト関数と同一視することができる [19, 28]。

以下の議論ではツイスト関数 φ の極と零点の構造が重要な役割を果たす。 φ の極と零点の集合をそれぞれ \mathfrak{p} 、 \mathfrak{z} と示す。

CS 微分 3 形式は通常通り以下のように定義される。

$$CS(A) := \left\langle A, dA + \frac{2}{3} A \wedge A \right\rangle \quad (3.3.4)$$

A は $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値を取る微分 1 形式であり、成分では

$$A = A_{\sigma} d\sigma + A_{\tau} d\tau + A_{\bar{z}} d\bar{z} \quad (3.3.5)$$

と表される。ここで z 成分は常に無視することができることに注意せよ。なぜなら作用 (3.3.2) は、 ω が (1.9) 形式であることに起因して、余剰なゲージ対称性

$$A \mapsto A + \chi dz \quad (3.3.6)$$

³作用の全体のファクターは [8] のものと異なっている。作用の実性条件を課し、 $\varphi(z)$ がツイスト関数と同定されるためにこのように取る必要がある。以降の節ではこの規格化を常に用いるとする。

を持つからである。このゲージ対称性により、ゲージ条件 $A_z = 0$ を常に取れる。

ゲージ場 A に関する変分を取ると作用 (3.3.2) は、

$$\delta S[A] = \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge \langle \delta A, F(A) \rangle + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} d\omega \wedge \langle A, \delta A \rangle \quad (3.3.7)$$

と変化する。ここで場の強さ $F(A) := dA + A \wedge A$ を定義し、 A が $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ の境界で消えることを仮定している。変分 (3.3.7) は作用 (3.3.2) の停留点を与える: bulk 運動方程式 (以下 bulk EOM)

$$\omega \wedge F(A) = 0 \quad (3.3.8)$$

と boundary 方程式 (以下 boundary EOM)

$$d\omega \wedge \langle A, \delta A \rangle = 0 \quad (3.3.9)$$

が得られる。ここで、boundary EOM(3.3.9) は $\mathcal{M} \times \mathfrak{p} \subset \mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ にのみ台を持つことに注意せよ。なぜなら、

$$d\omega = \partial_{\bar{z}} \varphi(z) d\bar{z} \wedge dz$$

であり、これは φ の極のみで値を取る超関数だからである。(3.3.9) を満たす境界条件の選び方が可積分変形の導出に対して肝要である [19]。

bulk EOM(3.3.8) は成分で以下のように表される。

$$\partial_\sigma A_\tau - \partial_\tau A_\sigma + [A_\sigma, A_\tau] = 0, \quad (3.3.10)$$

$$\omega (\partial_{\bar{z}} A_\sigma - \partial_\sigma A_{\bar{z}} + [A_{\bar{z}}, A_\sigma]) = 0, \quad (3.3.11)$$

$$\omega (\partial_{\bar{z}} A_\tau - \partial_\tau A_{\bar{z}} + [A_{\bar{z}}, A_\tau]) = 0. \quad (3.3.12)$$

ファクター ω は $\partial_{\bar{z}} A_\sigma$ や $\partial_{\bar{z}} A_\tau$ が \mathfrak{z} に台を持つ $\mathbb{C}P^1$ 上の超関数である場合も考慮して残されている。

役立つ boundary EOM (3.3.9) の形として、

$$\sum_{x \in \mathfrak{p}} \sum_{p \geq 0} (\text{res}_x \xi_x^p \omega) \epsilon^{ij} \frac{1}{p!} \partial_{\xi_x}^p \langle A_i, \delta A_j \rangle \Big|_{\mathcal{M} \times \{x\}} = 0 \quad (3.3.13)$$

のように書くことができる。ここで ϵ^{ij} は反対称テンソルである。局所正則座標 ξ_x は $x \in \mathfrak{p} \setminus \{\infty\}$ に対し $\xi_x := z - x$ と定義され、もし \mathfrak{p} が無限遠点を含む場合は $\xi_\infty := 1/z$ である。関係式 (3.3.13) は明示的に boundary EOM が $\mathcal{M} \times \mathfrak{p}$ でのみ零でない値を取ることを示している。

ゲージ不変性

作用 (3.3.2) のゲージ不変性を議論しよう。

以下の変換を考える。

$$A \mapsto A^u := uAu^{-1} - duu^{-1}. \quad (3.3.14)$$

ここで u は $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ 上で定義された $G^{\mathbb{C}}$ に値を取る関数である。この変換の下で、場の強さ $F(A)$ は

$$F(A) \mapsto F(A^u) = uF(A)u^{-1} \quad (3.3.15)$$

のように変換する。

off-shell レベルの議論では、作用 (3.3.2) は変換 (3.3.14) のもとで

$$S[A^u] = S[A] + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge I_{WZ}[u] + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge d\langle u^{-1}du, A \rangle \quad (3.3.16)$$

と変換する。 $I_{WZ}[u]$ は Wess-Zumino (WZ) 3 形式であり、

$$I_{WZ}[u] := \frac{1}{3} \langle u^{-1}du, u^{-1}du \wedge u^{-1}du \rangle \quad (3.3.17)$$

と定義される。従って作用 (3.3.2) は

$$\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge I_{WZ}[u] = 0, \quad u|_{\mathfrak{p}} = 1 \quad (3.3.18)$$

を満たすゲージパラメータ u に対して不変である。変換 (3.3.14) は (3.3.18) を満たすパラメータ u によるゲージ変換と見做すことができる。

on-shell レベルでの議論をすると、bulk EOM (3.3.8) は常に変換 (3.3.14) の下で不変であるが、boundary EOM (3.3.9) は一般に変化する。従って 2 種類のゲージ変換を考える必要がある。1) 変換 $A \mapsto A^u$ のうち boundary EOM を満たすものを「ゲージ変換」と呼び、2) 一般の off-shell ゲージ変換を「形式的なゲージ変換」と呼ぶ。

3.3.2 Lax 形式

ここで Lax 形式を導入する。

滑らかな関数 $\hat{g} : \mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1 \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ を用いて形式的なゲージ変換

$$A = -d\hat{g}\hat{g}^{-1} + \hat{g}\mathcal{L}\hat{g}^{-1} \quad (3.3.19)$$

を考える。これにより常にゲージ条件

$$\mathcal{L}_{\bar{z}} = 0 \quad (3.3.20)$$

を取ることができる。よって1形式 \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} := \mathcal{L}_\sigma d\sigma + \mathcal{L}_\tau d\tau \quad (3.3.21)$$

という形となり、これをLax形式と呼ぶ。後の議論で、これは2次元の可積分理論のLax pairとみなせることがわかる。

Lax形式 \mathcal{L} を用いると、bulk EOMは

$$\partial_\tau \mathcal{L}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{L}_\tau + [\mathcal{L}_\tau, \mathcal{L}_\sigma] = 0, \quad (3.3.22)$$

$$\omega \wedge \partial_{\bar{z}} \mathcal{L} = 0 \quad (3.3.23)$$

と表される。これより ω の零点に極を持つ有理型1形式であることが従い、つまり \mathfrak{z} は \mathcal{L} の極の集合と見做すこともできる。ここで、変換(3.3.19)はあくまで形式的なゲージ変換であるため、Lax形式 \mathcal{L} 元々のboundary EOM(3.3.9)を満たさないということに注意せよ。

式(3.3.19)を作用(3.3.2)に代入して(3.3.16)を用いると、以下の関係式

$$S[A] = +\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge I_{WZ}[\hat{g}] + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge d(\hat{g}^{-1} d\hat{g}, \mathcal{L}) \quad (3.3.24)$$

が得られる。これはまだ4次元の作用である。この形から2次元の作用を得るために、次の節で述べる条件を課す必要がある。

3.3.3 archipelago 条件による次元簡約

[19]で説明されているように、もし \hat{g} が以下で定義する**archipelago 条件**を満たすならば、作用(3.3.24)はWZ項を持つ2次元の作用に簡約することができる。2次元の理論は \mathfrak{p} の各点に物理的な自由度を持つ。

\hat{g} に対するarchipelago条件を以下の通り定義する。

各点 $x \in \mathfrak{p}$ に対して以下を満たす開円盤 V_x, U_x ($\{x\} \subset V_x \subset U_x$)が存在する。

i) 任意の $x, y \in \mathfrak{p}$ に対し、 $x \neq y$ ならば $U_x \cap U_y = \emptyset$ 、

ii) $\mathcal{M} \times \cup_{x \in \mathfrak{p}} U_x$ の外においては $\hat{g} = 1$ 、

iii) $\hat{g}|_{\mathcal{M} \times U_x}$ は τ, σ と動径座標 $|\xi_x|$ (ξ_x : 局所正則座標) のみに依存し、

iv) $\hat{g}|_{\mathcal{M} \times V_x}$ は τ と σ のみに依存、つまり、 $g_x := \hat{g}|_{\mathcal{M} \times V_x} = \hat{g}|_{\mathcal{M} \times \{x\}}$ を満たす。

条件 i) と ii) はゲージ変換によって常に満たすことができるが、iii) と iv) を満たすためには適切な境界条件を課す必要がある。archipelago 条件の意味するところは、 \mathcal{L} と A が “島” U_x の外では一致していて、 U_x の中では異なっても良いということである。より正確には、Lax 形式 \mathcal{L} は bulk EOM により $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ においては有理型である一方、 A は boundary EOM(3.3.9) を満たすために形式的なゲージ変換で U_x 内で修正されている。

もし \hat{g} が archipelago 条件を満たすならば、 $\mathbb{C}P^1$ 上の積分を実行することにより 4次元の作用 (3.3.2) は WZ 項を伴った 2次元の作用に簡約することができる。結果的に得られる作用は

$$S[\{g_x\}_{x \in \mathfrak{p}}] = -\frac{1}{2} \sum_{x \in \mathfrak{p}} \int_{\mathcal{M}} \langle \text{res}_x(\varphi \mathcal{L}), g_x^{-1} dg_x \rangle - \frac{1}{2} \sum_{x \in \mathfrak{p}} (\text{res}_x \omega) \int_{\mathcal{M} \times [0, R_x]} I_{\text{WZ}}[g_x] \quad (3.3.25)$$

となり、ここで R_x は開円盤 U_x の半径である。archipelago 条件 iii) により、動径方向に関する積分のみ (3.3.25) の第 2 項に残っている。

ここで、作用 (3.3.25) はまだ 2次元ゲージ対称性を持っていることに注意せよ。ゲージパラメータ $h: \mathcal{M} \rightarrow G$ を伴った変換

$$g_x \mapsto g_x h, \quad \mathcal{L} \mapsto h^{-1} \mathcal{L} h + h^{-1} dh \quad (3.3.26)$$

のもとで作用 (3.3.25) は確かに不変になっている。これはゲージ固定 (3.3.20) を行ったあとの残ったゲージ対称性を見做すことができる。

実性条件

4次元の作用 (3.3.2) 及び得られた作用 (3.3.25) の実性を保証するために、 ω の関数形と A の境界条件に幾らかの条件を自然に課することができる [19]。複素座標 z に対して、複素共役 $z \mapsto \bar{z}$ により対合 $\mu_t: \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ が定義される。今 $\tau: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ を反線型な対合とする。この時、 τ の固定点の集合が $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実な部分代数 \mathfrak{g} である。反線型対合 τ は

$$\overline{\langle B, C \rangle} = \langle \tau B, \tau C \rangle, \quad \forall B, C \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \quad (3.3.27)$$

を満たす。 τ に対応する Lie 群に対する操作を $\tilde{\tau}: G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ と定める。

これらの対合を導入することにより、作用 (3.3.2)(3.3.25) の実性が保証されるために以下の条件を課せば良い。

$$\bar{\omega} = \mu_t^* \omega, \quad (3.3.28)$$

$$\tau A = \mu_t^* A. \quad (3.3.29)$$

関係式 (3.3.19) を思い出すと、条件

$$\tilde{\tau} \hat{g} = \mu_t^* \hat{g}, \quad \tau \mathcal{L} = \mu_t^* \mathcal{L} \quad (3.3.30)$$

を課せば (3.3.29) が満たされることがわかる。

3.3.4 rational 処方での η 変形された主カイラル模型の導出

例として η 変形された主カイラル模型の作用とその Lax pair を導出することを考える。ここでは rational 処方を採用するが、後の便利のために [19] とは left と right の対称性を入れ替えて議論する。すなわち、[19] では left 対称性が破られている一方、ここでの議論では [45, 51] と同様に right 対称性を破っている。

ツイスト関数 [51, 82]

$$\omega = \varphi(z_L) dz_L = \frac{K}{1 - c^2 \eta^2} \frac{1 - z_L^2}{z_L^2 - c^2 \eta^2} dz_L \quad (3.3.31)$$

から議論を始めよう。ここで K は実定数であり、 η は実の変形パラメータである。そして c は mCYBE (2.2.25) に現れる定数と後に同定される。Section 2.2.2 で述べたように、 c の値により mCYBE は (i) $c = 1$ (split 型) と (ii) $c = i$ (non-split 型) に分類される。特に、我々が興味があるのは Section 2.2.2 で考えたような歪対称な R -作用素であり、つまり、

$$\langle R(X), Y \rangle = -\langle X, R(Y) \rangle, \quad \forall X, Y \in \mathfrak{g}^C \quad (3.3.32)$$

を満たすものである。

具体性を持たせるために、以下では $c = i$ とする。するとツイスト関数 (3.3.31) は次のようになる。

$$\varphi(z_L) = \frac{K}{1 + \eta^2} \frac{1 - z_L^2}{z_L^2 + \eta^2}. \quad (3.3.33)$$

よって有理型 1 形式 ω は位数 1 の極 $\mathfrak{p}_1 = \{\pm i\eta\}$ と位数 2 の極 $\mathfrak{p}_2 = \{\infty\}$ を持ち、位数 1 の零点を $\mathfrak{z} = \{\pm 1\}$ に持つ。

ω の極における留数は $\text{res}_{-i\eta} \omega = \overline{\text{res}_{+i\eta} \omega}$ という関係を満たしているため、boundary EOM(3.3.13) は

$$\epsilon^{ij} \langle\langle A_i|_{+i\eta}, \delta A_j|_{+i\eta} \rangle\rangle_{\mathfrak{g}^C; \pm i\eta} + (\text{res}_{\infty} \omega) \epsilon^{ij} \langle A_i|_{\infty}, \delta A_j|_{\infty} \rangle + (\text{res}_{\infty} \xi_x \omega) \epsilon^{ij} \partial_{\xi_x} \langle A_i, \delta A_j \rangle|_{\infty} = 0 \quad (3.3.34)$$

と書ける。ここで、 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}; \pm i\eta}} : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \times \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{R}$ は非縮退で対称な随伴不変双線型形式であり、次のように定義される。

$$\langle\langle x, x' \rangle\rangle_{\mathfrak{g}^{\mathbb{C}; \pm i\eta}} := 2 \operatorname{Re} \left((\operatorname{res}_{+i\eta} \omega) \langle x, x' \rangle \right), \quad x, x' \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}. \quad (3.3.35)$$

boundary EOM 解くために、以下のような条件を置く。

$$A_i|_{+i\eta} \in \mathfrak{g}_R, \quad (3.3.36)$$

$$A_i|_{\infty} = 0. \quad (3.3.37)$$

\mathfrak{g}_R は $\mathfrak{g}_R := \{(R-i)x | x \in \mathfrak{g}\}$ と定義され、Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分代数になっていることがわかる。1つ目の条件 (3.3.36) により (3.3.34) の第1項が消え、2つ目の条件 (3.3.37) は (3.3.34) の第2項、第3行目を0にする。境界条件 (3.3.36) は Lie 代数の分解 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_R \oplus \mathfrak{g}$ を誘導する。ここで組 $(\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}, \mathfrak{g}_R, \mathfrak{g})$ は Manin triple となる。Manin triple の定義については Appendix A を見よ。 \mathfrak{g}_R が Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の部分代数であるという事実は、boundary EOM (3.3.34) を保ちながら archipelago 条件 iii) と iv) を満たすために極めて重要な役割を果たしている [19]。

4次元の CS 理論の運動方程式が ω の零点でも非縮退であるという要請から、Lax 形式 \mathcal{L} は \mathfrak{z} の各点において位数1の極を持つべきである。従って \mathcal{L} の型として、以下のものを仮定するのが自然である。

$$\mathcal{L} = \frac{V_+}{z_L + 1} d\sigma^+ + \frac{V_-}{z_L - 1} d\sigma^- + U_+ d\sigma^+ + U_- d\sigma^-. \quad (3.3.38)$$

ここで $V_{\pm}, U_{\pm} : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}$ は滑らかな関数であり、光円錐座標 σ^{\pm} (2.1.1) は

$$d\sigma^+ \wedge d\sigma^- = -\frac{1}{2} d\tau \wedge d\sigma \quad (3.3.39)$$

を満たす。2次元のゲージ対称性と Lie 部分代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に伴う自由度により、archipelago 型の場 \hat{g} は

$$\hat{g}_{\pm i\eta} = g^{-1}, \quad \hat{g}_{\infty} = 1 \quad (3.3.40)$$

と選べる。 $g : \mathcal{M} \rightarrow G$ もやはり滑らかな関数であり、 g の実性は適切な条件 (3.3.30) によって保証される。

A と \mathcal{L} の間の関係式 (3.3.19) により、

$$A|_{\pm i\eta} = g^{-1} dg + \operatorname{Ad}_{g^{-1}} \mathcal{L}|_{\pm i\eta}, \quad A|_{\infty} = \mathcal{L}|_{\infty} \quad (3.3.41)$$

が従う。ここで随伴作用 Ad_g は

$$\operatorname{Ad}_g x := g x g^{-1}, \quad \text{for } x \in \mathfrak{g} \quad (3.3.42)$$

と定義される。境界条件 (3.3.36) とは (3.3.37) 明示的に

$$(R+i)A_i|_{i\eta} = (R-i)A_i|_{-i\eta}, \quad A|_{\infty} = 0 \quad (3.3.43)$$

と書くことができる。左不変 1 形式 $j := g^{-1}dg$ と $R_g := \text{Ad}_g^{-1} \circ R \circ \text{Ad}_g$ を導入すると、未知関数 V_{\pm} 、 U_{\pm} は (3.3.38)、(3.3.41)、(3.3.43) を組み合わせることにより

$$V_{\pm} = \mp \frac{\eta^2 + 1}{1 \mp \eta R_{g^{-1}}} \partial_{\pm} g g^{-1} = \mp g \left(\frac{\eta^2 + 1}{1 \mp \eta R} j_{\pm} \right) g^{-1}, \quad U_{\pm} = 0 \quad (3.3.44)$$

と決定される。結果的に、Lax 形式は次のように与えられる。⁴

$$\mathcal{L} = g \left[- \left(\frac{\eta^2 + 1}{1 - \eta R} \right) \frac{1}{z_L + 1} j_+ d\sigma^+ + \left(\frac{\eta^2 + 1}{1 + \eta R} \right) \frac{1}{z_L - 1} j_- d\sigma^- \right] g^{-1}. \quad (3.3.45)$$

最後に 2 次元の作用 (3.3.25) を評価しよう。留数 $\text{res}_{\pm i\eta}(\varphi\mathcal{L})$ は

$$\text{res}_{\pm i\eta}(\varphi\mathcal{L}) = \mp \frac{K}{2i\eta} g \left(\frac{1 \mp i\eta}{1 - \eta R} j_+ d\sigma^+ + \frac{1 \pm i\eta}{1 + \eta R} j_- d\sigma^- \right) g^{-1} \quad (3.3.46)$$

と計算されるため、 $\hat{g}^{-1}d\hat{g}|_{\infty} = 0$ をふまえると、得られる作用は

$$S[g] = - \frac{K}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \left\langle j_-, \frac{1}{1 - \eta R} j_+ \right\rangle \quad (3.3.47)$$

である。作用 (3.3.47) と Lax 形式 (3.3.45) は η 変形された主カイラル模型 [42, 43] のものと等価であることがわかる。

⁴この Lax pair は (2.4.12) とゲージ変換で結ばれていることがすぐにわかる。ここでのゲージ変換は 4 次元 CS 理論の 2 次元ゲージ変換ではなく、Lax pair の変換 $\mathcal{L}' = g^{-1}\mathcal{L}g + g^{-1}dg$ である。

Chapter 4

Trigonometric 処方による主カイラル模型の導出

この節は [20] に基づき、trigonometric 処方のツイスト関数から始めて η 変形した主カイラル模型を再現する。ここでは、スペクトラルパラメータ z_R は円柱上の座標であり、 z_L でパラメトライズされた \mathbb{C} とは異なる幾何である。円柱の幾何は、可積分系の trigonometric クラスの特徴であり、 z_R と z_L は明確に区別しなければならない [51]。(しかしながら、後述するように両者はある関係を介して互いに関連している。)

実際、円柱は一对の $\mathbb{C}P^1$ に等価である。rational 処方を採用する場合、等価性を見るためには、ゲージ変換されたモノドロミーを別途考慮する必要がある。しかし、trigonometric 処方から出発することで、スペクトラルパラメータの空間全体を一度に構築して議論することができる。

この解析により、trigonometric 処方から出発することで、よく知られている結果を再現できるだけでなく、その副産物として新しいタイプの YB 変形を発見することができる [20]。

4.1 ツイスト関数

trigonometric 処方 [51, 82] における有理型 1 形式 ω は以下のように与えられる。

$$\omega = \frac{\sinh(\alpha - z_R) \sinh(\alpha + z_R)}{\sinh \alpha \cosh \alpha \sinh^2 z_R} dz_R = \varphi_c(z_R) dz_R. \quad (4.1.1)$$

ここで α は純虚のパラメータである。ツイスト関数 $\varphi_c(z_R)$ は周期性

$$\varphi_c(z_R) = \varphi_c(z_R + 2\pi i) \quad (4.1.2)$$

を持つため、 z_R の定義域を次のように取る。

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} = \left\{ z_R \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \text{Im } z_R < \frac{3\pi}{2} \right\}. \quad (4.1.3)$$

この円柱 \mathbb{C}/\mathbb{Z} は写像

$$w_R := \exp z_R \quad (4.1.4)$$

を用いて $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に写される。これにより (4.1.1) における ω は

$$\omega = \frac{4(e^{2\alpha} - w_R^2)(e^{2\alpha} w_R^2 - 1)}{(e^{4\alpha} - 1)w_R(w_R^2 - 1)^2} dw_R = \varphi(w_R) dw_R \quad (4.1.5)$$

のように書き直せる。以下では、 w_R を Riemann 面の大域的正則座標として用いる。

ω の零点と極

(4.1.5) の有理型 1 形式 ω は位数 1 の零点

$$\mathfrak{z} = \{e^{-\alpha}, e^\alpha, -e^{-\alpha}, -e^\alpha\} \quad (4.1.6)$$

を持ち、位数 1 の極の集合 \mathfrak{p}_1 と位数 2 の極 \mathfrak{p}_2 はそれぞれ

$$\mathfrak{p}_1 = \{0, \infty\}, \quad \mathfrak{p}_2 = \{-1, +1\}, \quad (\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \cup \mathfrak{p}_2) \quad (4.1.7)$$

と与えられる。これらの零点と極は Fig. 4.1 に示す。各極における留数は次の通りである。

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{w_R=1} \omega &= 0, & \operatorname{res}_{w_R=1} \xi_1 \omega &= \tanh \alpha, \\ \operatorname{res}_{w_R=-1} \omega &= 0, & \operatorname{res}_{w_R=-1} \xi_{-1} \omega &= -\tanh \alpha, \\ \operatorname{res}_{w_R=0} \omega &= -\frac{2}{\sinh 2\alpha}, & \operatorname{res}_{w_R=\infty} \omega &= +\frac{2}{\sinh 2\alpha}. \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

ここで局所正則座標は $\xi_{\pm 1} := w_R \mp 1$ で定義されている。

ω の実性条件

trigonometric 処方における実性条件を考えよう。スペクトラルパラメータが住む Riemann 面は rational 処方の時とは異なっているため、取りうる実性条件をより慎重に議論する必要がある。

対合 μ_t は複素座標 $z'_R := iz_R$ に対する複素共役として課せば良いということがわかる。つまり、

$$\mu_t : z'_R \rightarrow \overline{z'_R} \iff z_R \rightarrow -\overline{z_R} \iff w_R \rightarrow \frac{1}{\overline{w_R}}. \quad (4.1.9)$$

として定義する。 $|w_R| = 1$ を満たす点は μ_t の固定点になっていることに注意せよ。そして μ_t を用いて実性条件 (3.3.28) は定義される。この条件は明示的に

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \overline{\left(\frac{\sin(i\alpha - z'_R) \sin(i\alpha + z'_R)}{\sin i\alpha \cos i\alpha \sin^2 z'_R} dz'_R \right)} = \frac{\sin(i\alpha - \overline{z'_R}) \sin(i\alpha + \overline{z'_R})}{\sin i\alpha \cos i\alpha \sin^2 \overline{z'_R}} d\overline{z'_R} \\ &= \mu_t^* \omega \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

と満たされていることがわかる。

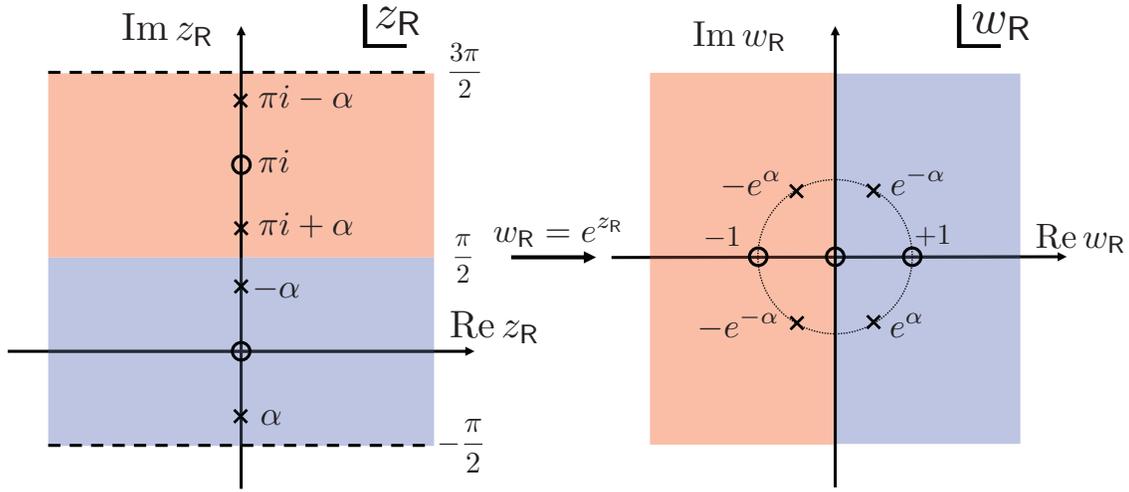


Figure 4.1.1: 座標 z_R を持つ \mathbb{C}/\mathbb{Z} と座標 w_R を持つ \mathbb{C}^\times 。 ω の極を \circ で、零点を \times で示している。

4.2 境界条件

trigonometric クラスの 4 次元 CS 理論 (3.3.2) において、底空間 $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ は $\mathcal{M} \times \mathbb{C}^\times$ に置き換えられる。しかしながら、bulk EOM(3.3.8) と boundary EOM(3.3.9) の形は変化しない。

(4.1.5) の ω に対して、boundary EOM(3.3.13) は次のようになる。

$$\begin{aligned}
0 = & (\text{res}_{w_R=1} \omega) \epsilon^{ij} \langle A_i|_1, \delta A_j|_1 \rangle + (\text{res}_{w_R=1} \xi_1 \omega) \epsilon^{ij} \partial_{\xi_1} \langle A_i|_1, \delta A_j|_1 \rangle \\
& + (\text{res}_{w_R=-1} \omega) \epsilon^{ij} \langle A_i|_{-1}, \delta A_j|_{-1} \rangle + (\text{res}_{w_R=-1} \xi_{-1} \omega) \epsilon^{ij} \partial_{\xi_{-1}} \langle A_i|_{-1}, \delta A_j|_{-1} \rangle \\
& + (\text{res}_{w_R=0} \omega) \epsilon^{ij} \langle A_i|_0, \delta A_j|_0 \rangle + (\text{res}_{w_R=\infty} \omega) \epsilon^{ij} \langle A_i|_\infty, \delta A_j|_\infty \rangle .
\end{aligned} \tag{4.2.1}$$

この方程式を満たすための十分条件として、

$$\epsilon^{ij} \langle\langle (A_i|_1, (\partial_{\xi_1} A_i)|_1), \delta (A_j|_1, (\partial_{\xi_1} A_j)|_1) \rangle\rangle_{t;1} = 0 \tag{4.2.2}$$

$$\epsilon^{ij} \langle\langle (A_i|_{-1}, (\partial_{\xi_{-1}} A_i)|_{-1}), \delta (A_j|_{-1}, (\partial_{\xi_{-1}} A_j)|_{-1}) \rangle\rangle_{t;-1} = 0, \tag{4.2.3}$$

$$\epsilon^{ij} \langle\langle (A_i|_0, A_i|_\infty), \delta (A_j|_0, A_j|_\infty) \rangle\rangle_{\mathfrak{h};w_R=0,\infty} = 0 \tag{4.2.4}$$

が考えられる。ここで新たな双線型形式がそれぞれ以下の通り定義されている。

$$\begin{aligned}
\langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_{t;1} & := (\text{res}_{w_R=1} \omega) \langle x, x' \rangle + (\text{res}_{w_R=1} \xi_1 \omega) (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle) \\
& = \tanh \alpha (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle),
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

$$\begin{aligned} \langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_{\mathfrak{t}; -1} &:= (\text{res}_{w_R=-1} \omega) \langle x, x' \rangle + (\text{res}_{w_R=-1} \xi_{-1} \omega) (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle) \\ &= -\tanh \alpha (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle), \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_{\mathfrak{h}; w_R=0, \infty} &:= (\text{res}_{w_R=0} \omega) \langle x, x' \rangle + (\text{res}_{w_R=\infty} \omega) \langle y, y' \rangle \\ &= -\frac{2}{\sinh 2\alpha} (\langle x, x' \rangle - \langle y, y' \rangle). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

これらの境界条件を満たすために、上の方程式にそれぞれ以下の Drinfel'd double (詳しくは Appendix A を見よ) を割り振ることを考える。まず $w_R = -1, +1$ に対しては

$$\mathfrak{t} = (\mathfrak{g} \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}) \quad (4.2.8)$$

を、 $w_R = 0, \infty$ に対しては

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^\delta \oplus \mathfrak{g}_R \quad (4.2.9)$$

を割り当てる。ここで \mathfrak{g}_{ab} は可換化された \mathfrak{g} のコピーであり、 \mathfrak{g}^δ と \mathfrak{g}_R は

$$\mathfrak{g}_R := \{((R-i)x, (R+i)x) | x \in \mathfrak{g}\}, \quad (4.2.10)$$

$$\mathfrak{g}^\delta := \{(x, x) | x \in \mathfrak{g}\} \quad (4.2.11)$$

と定義されている。さらに実性条件 (3.3.29) を考慮すると結果的に、 A_i に対する境界条件は

$$(A_i|_{w_R=1}, (\partial_{\xi_1} A_i)|_{w_R=1}) \in \{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}, \quad (4.2.12)$$

$$(A_i|_{w_R=-1}, (\partial_{\xi_{-1}} A_i)|_{w_R=-1}) \in \{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}, \quad (4.2.13)$$

$$(A_i|_{w_R=0}, A_i|_{w_R=\infty}) \in \mathfrak{g}_R, \quad (4.2.14)$$

である。Manin triple や Drinfel'd double に関する簡易なレビューについては、Appendix A を見よ。

これらの Drinfel'd double を選択することにより確かに boundary EOM が満たされていることがわかる。なぜならば、 $\{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}$ と \mathfrak{g}_R はそれぞれ双線型形式 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathfrak{t}; \pm 1}$ と $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathfrak{h}; w_R=0, \infty}$ に関して isotropic な部分空間だからである。つまり、

$$\langle\langle (0, y), (0, y') \rangle\rangle_{\mathfrak{t}; 1} = \tanh \alpha (\langle 0, y' \rangle + \langle 0, y \rangle) = 0, \quad (4.2.15)$$

$$\langle\langle (0, y), (0, y') \rangle\rangle_{\mathfrak{t}; -1} = -\tanh \alpha (\langle 0, y' \rangle + \langle 0, y \rangle) = 0, \quad (4.2.16)$$

$$\begin{aligned} &\langle\langle ((R-i)x, (R+i)x), ((R-i)x', (R+i)x') \rangle\rangle_{\mathfrak{h}; w_R=0, \infty} \\ &= -\frac{2}{\sinh 2\alpha} \langle (R-i)x, (R-i)x' \rangle + \frac{2}{\sinh 2\alpha} \langle (R+i)x, (R+i)x' \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{2}{\sinh 2\alpha} (\langle Rx, Rx' \rangle - \langle x, x' \rangle) + \frac{2}{\sinh 2\alpha} (\langle Rx, Rx' \rangle - \langle x, x' \rangle) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

が満たされていることがわかる。(4.2.17)において、 R -作用素の歪対称性が用いられている。

加えて、これらの部分空間はそれぞれ \mathfrak{t} と \mathfrak{h} の Lie 部分代数になっていることが、mCYBE (2.2.25) によって保証される。これらの条件は archipelago 条件を満たし、2次元の作用を導出するのに十分な条件である。

4.3 Lax 形式と2次元の作用

次に、前節でのツイスト関数と境界条件に紐づいた Lax 形式と2次元の作用を同定しよう。

最初に同定すべきは Lax 形式 \mathcal{L} である。有理型 1 形式 ω は4つの位数1の零点 \mathfrak{z} を持つため、Lax 形式は位数1の極を \mathfrak{z} に持つべきである。極の構造を考慮に入れ、Lax 形式の型として以下のものを仮定する。

$$\mathcal{L}_+ = \frac{V_+ w_R + V'_+}{e^{2\alpha} w_R^2 - 1} + U_+, \tag{4.3.1}$$

$$\mathcal{L}_- = \frac{V_- w_R + V'_-}{w_R^2 - e^{2\alpha}} + U_-. \tag{4.3.2}$$

ここで $V_{\pm}, V'_{\pm}, U_{\pm} : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は滑らかな関数である。実性条件 (3.3.30) は μ_t を用いて以下のように実現される。

$$\tau \mathcal{L}_{\pm} = \mu_t^* \mathcal{L}_{\pm}, \quad \tilde{\tau} \hat{g} = \mu_t^* \hat{g}. \tag{4.3.3}$$

境界条件を (4.2.12)、(4.2.13)、(4.2.14) のように取ることは

$$A_{\pm}|_{w_R=+1} = 0, \quad A_{\pm}|_{w_R=-1} = 0, \tag{4.3.4}$$

$$(R+i)A_{\pm}|_{w_R=0} = (R-i)A_{\pm}|_{w_R=\infty} \tag{4.3.5}$$

を満たすことと同値である。従って関係式 (3.3.19) を用いると、以下の表式を得る。

$$\hat{g}^{-1} \partial_{\pm} \hat{g}|_{w_R=+1} = \pm \frac{V_{\pm} + V'_{\pm}}{e^{2\alpha} - 1} + U_{\pm}, \tag{4.3.6}$$

$$\hat{g}^{-1} \partial_{\pm} \hat{g}|_{w_R=-1} = \pm \frac{-V_{\pm} + V'_{\pm}}{e^{2\alpha} - 1} + U_{\pm}, \tag{4.3.7}$$

$$(R+i) [\hat{g}(-\hat{g}^{-1} \partial_+ \hat{g} - V'_+ + U_+) \hat{g}^{-1}]|_{w_R=0} = (R-i) [\hat{g}(-\hat{g}^{-1} \partial_+ \hat{g} + U_+) \hat{g}^{-1}]|_{w_R=\infty}, \tag{4.3.8}$$

$$(R+i) [\hat{g}(-\hat{g}^{-1}\partial_- \hat{g} - e^{-2\alpha}V'_- + U_-)\hat{g}^{-1}]|_{w_R=0} = (R-i) [\hat{g}(-\hat{g}^{-1}\partial_- \hat{g} + U_-)\hat{g}^{-1}]|_{w_R=\infty}. \quad (4.3.9)$$

Drinfel'd double (4.2.9) を選択することにより (複素 Lie 群 $G^{\mathbb{C}}$ ではなく) $\hat{g}|_{w_R=0} \in G$ と取ることができるため、2次元のゲージ対称性 $g \mapsto gh$ ($h \in G$) を用いると $\hat{g}|_{w_R=0} = 1$ と取ることができる。さらに、条件 $\tilde{\tau}\hat{g} = \mu_t^*\hat{g}$ は $\tilde{\tau}(\hat{g}|_{w_R=0}) = \mu_t^*(\hat{g}|_{w_R=0}) = \hat{g}|_{w_R=\infty}$ であることを示しており、つまり

$$\hat{g}|_{w_R=0} = \hat{g}|_{w_R=\infty} = 1 \quad (4.3.10)$$

であることがわかる。他の極については、自由度 $g, \tilde{g} \in G$ を

$$g := \hat{g}|_{w_R=+1}, \quad \tilde{g} := \hat{g}|_{w_R=-1} \quad (4.3.11)$$

と導入することができる。これは $w_R = \pm 1$ が μ_t の固定点であるため可能になっている。

g と \tilde{g} に対して左不変 1 形式を次のように導入する。

$$j_{\pm} := g^{-1}\partial_{\pm}g, \quad \tilde{j}_{\pm} := \tilde{g}^{-1}\partial_{\pm}\tilde{g}. \quad (4.3.12)$$

これらを用いると境界条件 (4.3.6)-(4.3.9) は

$$\pm \frac{V_{\pm} + V'_{\pm}}{e^{2\alpha} - 1} + U_{\pm} = j_{\pm}, \quad (4.3.13)$$

$$\pm \frac{-V_{\pm} + V'_{\pm}}{e^{2\alpha} - 1} + U_{\pm} = \tilde{j}_{\pm}, \quad (4.3.14)$$

$$(R+i)(-V'_+ + U_+) = (R-i)(+U_+), \quad (4.3.15)$$

$$(R+i)(-e^{-2\alpha}V'_- + U_-) = (R-i)(+U_-) \quad (4.3.16)$$

と書き直せる。これらの関係式を解くことにより、

$$V_{\pm} = \pm(e^{2\alpha} - 1)\frac{j_{\pm} - \tilde{j}_{\pm}}{2}, \quad (4.3.17)$$

$$V'_+ = \frac{1}{\coth \alpha - iR}(j_+ + \tilde{j}_+), \quad (4.3.18)$$

$$V'_- = -\frac{e^{2\alpha}}{\coth \alpha + iR}(j_- + \tilde{j}_-), \quad (4.3.19)$$

$$U_{\pm} = \pm \frac{1 \mp \coth \alpha}{2(\coth \alpha \mp iR)}(j_{\pm} + \tilde{j}_{\pm}) + \frac{1}{2}(j_{\pm} + \tilde{j}_{\pm}) \quad (4.3.20)$$

が得られる。従って (4.3.1) と (4.3.2) で与えられる \mathcal{L} の各成分は以下の通り表せる。

$$\mathcal{L}_+ = \frac{\sinh \alpha}{2 \sinh(z_R + \alpha)}(j_+ - \tilde{j}_+) + \frac{1}{2} \frac{i \coth(z_R + \alpha) + R}{i \coth \alpha + R}(j_+ + \tilde{j}_+), \quad (4.3.21)$$

$$\mathcal{L}_- = -\frac{\sinh \alpha}{2 \sinh(z_R - \alpha)}(j_- - \tilde{j}_-) + \frac{1}{2} \frac{i \coth(z_R - \alpha) + R}{-i \coth \alpha + R}(j_- + \tilde{j}_-). \quad (4.3.22)$$

これらの表式を組み合わせるとまとめて

$$\mathcal{L}_\pm = \pm \frac{\sinh \alpha}{2 \sinh(z_R \pm \alpha)} (j_\pm - \tilde{j}_\pm) + \frac{1}{2} \frac{i \coth(z_R \pm \alpha) + R}{\pm i \coth \alpha + R} (j_\pm + \tilde{j}_\pm) \quad (4.3.23)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1 + \eta^2 \left(\frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}\right)^2}}{1 \pm \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}} (j_\pm - \tilde{j}_\pm) + \frac{1}{2} \frac{1}{1 \pm \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}} \left(1 \mp \frac{\eta \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha} (\eta \pm R)}{1 \mp \eta R} \right) (j_\pm + \tilde{j}_\pm) \quad (4.3.24)$$

と書ける。ここで変形パラメータ η は α と

$$-i\eta := \tanh \alpha \quad (4.3.25)$$

のように関係付いている。Lax 形式 (4.3.23) は確かに実性条件を満たしていることが次のようにわかる。

$$\begin{aligned} \tau \mathcal{L} &= \left[\pm \frac{\sinh \alpha}{2 \sinh(-\bar{z}_R \pm \alpha)} (j_\pm - \tilde{j}_\pm) + \frac{1}{2} \frac{i \coth(-\bar{z}_R \pm \alpha) + R}{\pm i \coth \alpha + R} (j_\pm + \tilde{j}_\pm) \right] d\sigma^\pm \\ &= \mathcal{L}_\pm(-\bar{z}_R) d\sigma^\pm \\ &= \mu_t^* \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

最後の \mathcal{L} の表式 (4.3.24) は後の議論で有用である。

公式 (3.3.25) を評価することにより変形された作用を導出しよう。導出に必要な幾つかの留数は以下のように計算できる。

$$\begin{aligned} \text{res}_{w_R=1} \omega \wedge \mathcal{L} &= dw_R \wedge d\sigma^+ \left[-\frac{1}{2} (j_+ - \tilde{j}_+) - \frac{2e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - 1} \frac{1}{\coth \alpha - iR} (j_+ + \tilde{j}_+) \right] \\ &\quad + dw_R \wedge d\sigma^- \left[\frac{1}{2} (j_- - \tilde{j}_-) + \frac{2e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - 1} \frac{1}{\coth \alpha + iR} (j_- + \tilde{j}_-) \right], \end{aligned} \quad (4.3.27)$$

$$\begin{aligned} \text{res}_{w_R=-1} \omega \wedge \mathcal{L} &= dw_R \wedge d\sigma^+ \left[\frac{1}{2} (j_+ - \tilde{j}_+) - \frac{2e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - 1} \frac{1}{\coth \alpha - iR} (j_+ + \tilde{j}_+) \right] \\ &\quad + dw_R \wedge d\sigma^- \left[-\frac{1}{2} (j_- - \tilde{j}_-) + \frac{2e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - 1} \frac{1}{\coth \alpha + iR} (j_- + \tilde{j}_-) \right]. \end{aligned} \quad (4.3.28)$$

これらを見ると、 U_\pm からの寄与は消えていることがわかる。さらに $w_R = \pm$ での留数

$$\text{res}_{w_R=\pm 1} \omega = 0, \quad (4.3.29)$$

を用いると、結果的 2 次元の作用が以下の通り得られる。

$$S[\{j, \tilde{j}\}] = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \left[\langle j_+ - \tilde{j}_+, j_- - \tilde{j}_- \rangle + \frac{2e^{2\alpha}}{e^{4\alpha} - 1} \langle j_+ + \tilde{j}_+, \frac{2}{\coth \alpha + iR} (j_- + \tilde{j}_-) \rangle \right]. \quad (4.3.30)$$

変形パラメータ η の言葉でいうと、上の作用は

$$S[\{j, \tilde{j}\}] = -\frac{1}{4} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \left[\langle j_+ - \tilde{j}_+, j_- - \tilde{j}_- \rangle + (1 + \eta^2) \langle j_+ + \tilde{j}_+, \frac{1}{1 + \eta R} (j_- + \tilde{j}_-) \rangle \right] \quad (4.3.31)$$

と書くことができる。

4.4 \tilde{j} と j の関係付け

ここまでの議論で、得られた Lax 形式と 2 次元の作用は j と \tilde{j} を用いて書かれていた。良く知られた模型を再現するために、 j と \tilde{j} の間にある関係を課すことを考えよう。この関係式の選び方はいくらかの任意性があり、異なる j と \tilde{j} の関係付けは異なった作用を導くことがわかる。

まずは作用 (4.3.31) が j と \tilde{j} の交換の元で不変であることに注意されたい。この事実は関係式 $\tilde{j} = f(j)$ が \mathbb{Z}_2 -grading を持ち、すなわち $f(f(j)) = j$ を満たせば整合的に拘束 $\tilde{j} = f(j)$ を導入できることを意味している。以下では j と \tilde{j} の具体的な関係について議論する。 \tilde{j} は \tilde{g} で構成された左不変 1 形式なので off-shell の平坦性条件

$$\partial_+ \tilde{j}_- - \partial_- \tilde{j}_+ + [\tilde{j}_+, \tilde{j}_-] = 0 \quad (4.4.1)$$

が満たされていなければならない。まとめると、関係式 $\tilde{j} = f(j)$ は $f \circ f = 1$ を満たし、 \tilde{j} が off-shell 平坦性条件を満たすために f は自己同型写像でなければならない。

自明な関係式¹

$$\text{i) } \quad \tilde{j} = j \quad (4.4.2)$$

は確かに上記の条件を満たしている。これは任意の Lie 代数 \mathfrak{g} に対して適用可能であり、 η 変形された主カイラル模型の作用 (3.3.47) を再現することを後に見る。

あるいは半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} に対しては、別の \tilde{j} の取り方を考えることができる。Cartan 標準形の \mathfrak{g} の交換関係は以下のように与えられる。

$$\begin{aligned} [H_a, H_b] &= 0, & (a, b = 1, 2, \dots, r), \\ [H_a, E_\alpha] &= \alpha(H_a) E_\alpha, & [E_\alpha, E_{-\alpha}] = \alpha(H_a) H_a, \\ [E_\alpha, E_\beta] &= N_{\alpha, \beta} E_{\alpha+\beta} & (\beta \neq -\alpha). \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

¹一見 $\tilde{j} = -j$ という選択も \mathbb{Z}_2 -grading を持つ良い関係付けに見えるが、 $f = -1$ は自己同型でなく、 \tilde{j} が平坦性条件を満たせないで許されることがわかる。

ここで H_a は \mathfrak{g} の Cartan 部分代数の生成子である。重要な点は交換関係 (4.4.3) は以下の変換の下で不変であるということである。²

$$E_{\pm\alpha} \mapsto \exp(\lambda_{\pm\alpha}) E_{\pm\alpha}, \quad H_a \mapsto H_a \quad (\lambda_{\pm\alpha} \in \mathbb{C}), \quad (4.4.4)$$

ここで導入されたパラメータ λ_α は

$$\lambda_\alpha + \lambda_\beta = \lambda_{\alpha+\beta}, \quad \lambda_\alpha + \lambda_{-\alpha} = 0. \quad (4.4.5)$$

を満たすものである。例えば、

$$\lambda_\alpha = -ik_\alpha\pi \quad (k_\alpha \in \mathbb{Z}). \quad (4.4.6)$$

と書けるものは対合となることがわかる。(4.4.5) と (4.4.6) を満たす写像 $\lambda: \mathbb{C}^r \rightarrow \mathbb{C}$ を実現する方法はいくらか考えられる。このような写像の具体的な構成方法の一例は Appendix B で述べる。

(4.4.4) の元での代数の不変性を用いると、(4.4.2) とは異なる配位として、

$$\text{ii) } \quad \tilde{j} = \exp(\pi\Sigma) j \quad (4.4.7)$$

を考えることができる。ここで $\Sigma: \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は

$$\Sigma(E_\alpha) = -ik_\alpha E_\alpha, \quad \Sigma(H_a) = 0 \quad (4.4.8)$$

と定義される。指数写像 (4.4.7) は (4.4.4) において (4.4.6) という選択をすることに対応している。この時、確かに \tilde{j} は j と同様に平坦性条件 (4.4.1) を満たし、 \mathbb{Z}_2 の構造を持つ。

$$j = \exp(\pi\Sigma) \circ \exp(\pi\Sigma) j. \quad (4.4.9)$$

k_α が偶の空間と奇の空間にそれぞれ grading 0 と 1 を割り振ることで、交換関係 (4.4.3) は \mathbb{Z}_2 -grading を持っている。

i) $\tilde{j} = j$ を満たす解

まず $\tilde{j} = j$ の配位を考えよう。この場合、Lax pair (4.3.21)、(4.3.22) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^R(w_R) &= + \frac{2}{e^{2\alpha} w_R^2 - 1} \frac{1}{\coth \alpha - iR} j_+ + \frac{1 - \coth \alpha}{\coth \alpha - iR} j_+ + j_+, \\ \mathcal{L}_-^R(w_R) &= - \frac{2}{e^{-2\alpha} w_R^2 - 1} \frac{1}{\coth \alpha + iR} j_- - \frac{1 + \coth \alpha}{\coth \alpha + iR} j_- + j_- \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

²これに近い形の指数写像は別の文脈 [83] でも議論されている。

となる。 z_R を用いると、Lax pair (4.4.10) はさらに以下のように書き直せる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pm}^R(z_R) &= \frac{i \coth(z_R \pm \alpha) + R}{\pm i \coth \alpha + R} j_{\pm} \\ &= \frac{1}{1 \pm \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}} \left(1 \mp \frac{\eta \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha} (\eta \pm R)}{1 \mp \eta R} \right) j_{\pm}.\end{aligned}\quad (4.4.11)$$

この表式はまさにスペクトラルパラメータ $\lambda_R = \tanh z_R / \tanh \alpha$ と変形パラメータ η を持つ、 η 変形された Lax pair [43] である。Lax pair (4.4.11) は周期性

$$\mathcal{L}^R(z_R + \pi i) = \mathcal{L}^R(z_R) \quad (4.4.12)$$

を持っていることがわかる。この Lax pair に伴う作用は (4.3.31) において $\tilde{j} = j$ と置くことで以下のように得られる。

$$S[g] = (1 + \eta^2) \int_{\mathcal{M}} d\sigma \wedge d\tau \left\langle j_-, \frac{1}{1 - \eta R} j_+ \right\rangle. \quad (4.4.13)$$

これは再び η 変形された主カイラル模型 [42, 43] の作用 (3.3.47) と同じものである。

su(2) の場合 例として、Lie 代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の場合を考えよう。 $\mathfrak{su}(2)$ の生成子 T^a ($a = 1, 2, 3$) を以下のように導入する。

$$[T^a, T^b] = \varepsilon^{abc} T^c, \quad \text{Tr}(T^a T^b) = -\frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (4.4.14)$$

ε^{abc} は完全反対称テンソルで $\varepsilon^{123} = +1$ と規格化されている。左不変 1 形式 j は

$$j_{\pm} = j_{\pm}^+ T^- + j_{\pm}^- T^+ + j_{\pm}^3 T^3 \quad (4.4.15)$$

と成分表示することができる。ここで T^{\pm} は T^1 と T^2 の線型結合で

$$T^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T^1 \pm iT^2), \quad [T^+, T^-] = 2iT^3, \quad [T^{\pm}, T^3] = \pm iT^{\pm} \quad (4.4.16)$$

と定義される。今 R -作用素として Drinfel'd-Jimbo 型 (2.2.30) のものを考えよう。Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ に対しては

$$R(T^{\pm}) = \mp iT^{\pm}, \quad R(T^3) = 0 \quad (4.4.17)$$

と与えられる。すると Lax pair (4.4.11) は明示的に

$$\mathcal{L}_{\pm}^R(z_R) = \frac{\sinh \alpha}{\sinh(\alpha \pm z_R)} \left[T^- e^{-z_R} j_{\pm}^+ + T^+ e^{+z_R} j_{\pm}^- + \frac{\cosh(\alpha \pm z_R)}{\cosh \alpha} T^3 j_{\pm}^3 \right] \quad (4.4.18)$$

と書き表される。Lax pair (4.4.18) は [51] の (4.22) と同じ表式である。

この Lax pair は rational 処方の Lax pair (3.3.45) と gauge 変換

$$\mathcal{L}^R(z_R) = g^{-1} \mathcal{L}^L(z_L) g + g^{-1} dg \quad (4.4.19)$$

で関係付いている。ただし、スペクトラルパラメータ z_L と z_R の関係は以下の通りである。

$$w_R = \exp z_R, \quad \frac{1}{w_R^2} = \frac{z_L + i\eta}{z_L - i\eta} \quad (4.4.20)$$

$$\exp(-2z_R) = \frac{z_L + i\eta}{z_L - i\eta}. \quad (4.4.21)$$

詳しくは Section 4.5 で述べる。

ii) $\tilde{j} = \exp(\pi\Sigma) j$ を満たす解

次に $\tilde{j} = \exp(\pi\Sigma) j$ の配位を考えよう。この場合、Lax pair (4.3.24) は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pm}^R(z_R) = & \frac{1}{2 \left(1 \pm \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}\right)} \left(1 \mp \frac{\eta \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha} (\eta \pm R)}{1 \mp \eta R} + \frac{1}{\cosh z_R} \right) j_{\pm} \\ & + \frac{1}{2 \left(1 \pm \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}\right)} \left(1 \mp \frac{\eta \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha} (\eta \pm R)}{1 \mp \eta R} - \frac{1}{\cosh z_R} \right) \exp(\pi\Sigma) j_{\pm} \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

という形をとる。この時、Lax pair (4.4.22) の周期性は

$$\mathcal{L}_{\pm}^R(z_R + 2\pi i) = \mathcal{L}_{\pm}^R(z_R) \quad (4.4.23)$$

であり、(4.4.12) の倍の周期性を持つことに注意せよ。

2次元の作用 (4.3.31) を書き直すために、左不変 1 形式 j_{\pm} を次のように展開する。

$$j_{\pm} = \sum_a j_{\pm}^a H_a + \sum_{\alpha > 0} (j_{\pm}^{\alpha} E_{\alpha} + j_{\pm}^{-\alpha} E_{-\alpha}). \quad (4.4.24)$$

この展開を (4.3.31) に代入し、Drinfel'd-Jimbo 型の R -作用素 (2.2.30)

$$R(E_{\pm\alpha}) = \mp i E_{\pm\alpha}, \quad R(H_a) = 0, \quad (4.4.25)$$

を用いると、作用

$$S[g] = \int_{\mathcal{M}} d\sigma \wedge d\tau \left(\sum_{\substack{\alpha, \alpha' > 0 \\ k_{\alpha}: \text{odd}}} \langle j_{+}^{\alpha} E_{\alpha} + j_{+}^{-\alpha} E_{-\alpha}, j_{-}^{\alpha'} E_{\alpha'} + j_{-}^{-\alpha'} E_{-\alpha'} \rangle + (1 + \eta^2) \sum_a \langle j_{+}^a H_a, j_{-}^a H_a \rangle \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{\substack{\alpha, \alpha' > 0 \\ k_\alpha: \text{even}}} \left((1 + i\eta) \langle j_+^{-\alpha} E_{-\alpha}, j_-^{\alpha'} E_{\alpha'} \rangle + (1 - i\eta) \langle j_+^{\alpha} E_{\alpha}, j_-^{-\alpha'} E_{-\alpha'} \rangle \right) \\
= & \int_{\mathcal{M}} d\sigma \wedge d\tau \left(\langle j_+, j_- \rangle + \eta^2 \sum_a \langle j_+^a H_a, j_-^a H_a \rangle \right. \\
& \left. - i\eta \sum_{\alpha, \alpha' > 0} \left(\langle j_+^{\alpha} E_{\alpha} + j_+^{-\alpha} E_{-\alpha}, \frac{\exp(\pi\Sigma) + 1}{2} (j_-^{-\alpha'} E_{-\alpha'} - j_-^{\alpha'} E_{\alpha'}) \rangle \right) \right)
\end{aligned} \tag{4.4.26}$$

が得られる。ここで、Cartan 標準形の生成子が双線型形式 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対し

$$\langle E_\alpha, E_\beta \rangle = \delta_{\alpha+\beta, 0}. \tag{4.4.27}$$

を満たすことを用いた。作用 (4.4.26) の 2 行目において、 $(\exp(\pi\Sigma) + 1)/2$ k_α が偶数であるような空間への射影であることに注意されたい。

作用 (4.4.26) を R -作用素の言葉で書いておくと扱いやすい。このために、関係式

$$\left(\frac{1}{1 - \eta R} + \frac{1}{1 + \eta R} \right) j_\pm = \frac{2}{1 + \eta^2} \sum_{\alpha > 0} (j_\pm^\alpha E_\alpha + j_\pm^{-\alpha} E_{-\alpha}) + 2 \sum_a j_\pm^a H_a \tag{4.4.28}$$

を用いる。上の表式 (4.4.26) は以下のように書き直される。

$$\begin{aligned}
S[g] = & \frac{1 + \eta^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d\sigma \wedge d\tau \left[\left\langle j_+, \frac{1}{1 + \eta R} j_- \right\rangle + \left\langle j_+, \frac{1}{1 - \eta R} j_- \right\rangle \right] \\
& - \eta \int_{\mathcal{M}} d\sigma \wedge d\tau \left\langle j_+, \frac{\exp(\pi\Sigma) + 1}{2} R j_- \right\rangle.
\end{aligned} \tag{4.4.29}$$

系 (4.4.29) の可積分性は 4 次元 CS 理論によるこの構成方法により保証されている。可積分性の直接的な証明は Appendix C をみよ。 Σ と R は定義により歪対称な作用素であるので、 B 場の寄与は作用 (4.4.29) の第 2 項のみから現れる。注目すべきことに、この作用は通常の変形 YB 変形されて主カイラル模型のものとは異なり、従ってこの変形は新型の YB 変形であると言える。通常、YB 変形には $1/(1 - \eta R)$ という 1 つの因子のみが含まれるが、加えて $1/(1 + \eta R)$ の因子も含まれている。YB 変形の計量は η^2 の形でのみ変形パラメータに依存するため、この作用から得られる標的空間の計量は通常のものと同じである。しかしながら、 B 場との結合は新たな要素 Σ が含まれていることにより異なっている。

(4.4.13) と (4.4.29) の全体にかかっているファクターを比較することは興味深い。(4.4.13) には余分なファクター 2 が (4.4.29) に対してかかっていることがわかる。仮に解 i) を 2 つの $1/(1 - \eta R)$ による変形とみなすならば、このファクター 2 は自然に説明できる。つまり、解 i) に対しては

$$\frac{2}{1 - \eta R} = \frac{1}{1 - \eta R} + \frac{1}{1 - \eta R}, \tag{4.4.30}$$

とみなす一方、解 ii) においてはこれらのうち 1 つが $1/(1 + \eta R)$ に置き換わっている。この性質は“カイラリティ”と呼ぶにふさわしい性質である。

su(2) の場合 具体的に、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の場合に Lax pair と作用の表式を与えよう。この場合、作用素 Σ は mCYBE(2.2.25) に現れる R -作用素と同一視することができる。なぜならば、Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ は偶数の k_{α_j} を非 Cartan の生成子を持たないからである。 $\tilde{j} = \exp(\pi R) j$ に対する Lax pair は (4.3.23) を用いることにより以下のように求められる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_+^R(w_R) &= \frac{1}{e^{2\alpha} w_R^2 - 1} [(e^{2\alpha} - 1)(j_+^+ T^- + j_+^- T^+) w_R + 2 \tanh \alpha j_+^3 T^3] + \tanh \alpha j_+^3 T^3 \\ &= \frac{(e^{2\alpha} - 1) w_R}{e^{2\alpha} w_R^2 - 1} (j_+^+ T^- + j_+^- T^+) + \frac{(e^{2\alpha} w_R^2 + 1)(e^{2\alpha} - 1)}{(e^{2\alpha} w_R^2 - 1)(e^{2\alpha} + 1)} j_+^3 T^3, \end{aligned} \quad (4.4.31)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_-^R(w_R) &= \frac{1}{w_R^2 - e^{2\alpha}} [-(e^{2\alpha} - 1)(j_-^+ T^- + j_-^- T^+) w_R - 2e^{2\alpha} \tanh \alpha j_-^3 T^3] - \tanh \alpha j_-^3 T^3 \\ &= -\frac{(e^{2\alpha} - 1) w_R}{w_R^2 - e^{2\alpha}} (j_-^+ T^- + j_-^- T^+) - \frac{(w_R^2 + e^{2\alpha})(e^{2\alpha} - 1)}{(w_R^2 - e^{2\alpha})(e^{2\alpha} + 1)} j_-^3 T^3. \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

これらは $z_R = \log w_R$ を用いて書くと、

$$\mathcal{L}_\pm^R(z_R) = \frac{\sinh \alpha}{\sinh(\alpha \pm z_R)} \left[T^- j_\pm^+ + T^+ j_\pm^- + \frac{\cosh(\alpha \pm z_R)}{\cosh \alpha} T^3 j_\pm^3 \right] \quad (4.4.33)$$

と表される。作用も同様に得ることができる。

$$S[g] = - \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \eta^{ij} [\text{Tr}(j_i j_j) - 2\eta^2 \text{Tr}(T^3 j_i) \text{Tr}(T^3 j_j)]. \quad (4.4.34)$$

Lax pair (4.4.33) と作用 (4.4.34) は squashed S^3 (潰された S^3) を標的空間にもつシグマ模型 [52, 84] のものである。

最後に上で述べた作用がダイポール型に書けることを示す。変形されたカレントを

$$J_\tau^{\pm} = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{1 + \eta^2}{1 \mp \eta R} j_+ + \frac{1 + \eta^2}{1 \pm \eta R} j_- \right) \cdot g^{-1}, \quad (4.4.35)$$

$$J_\sigma^{\pm} = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{1 + \eta^2}{1 \mp \eta R} j_+ - \frac{1 + \eta^2}{1 \pm \eta R} j_- \right) \cdot g^{-1} \quad (4.4.36)$$

と定義する。 R -作用素が (4.4.17) のように振る舞うことを思い出すと、これらの変形されたカレントは以下のように書ける。³

$$J_i^{\pm} = j_i - 2\eta^2 \text{Tr}(j_i T^3) g \cdot T_3 \cdot g^{-1} \mp \eta \varepsilon_{ij} \partial^j (g \cdot T_3 \cdot g^{-1}), \quad (4.4.37)$$

³ここでの J_i^{\pm} は [51] における j_μ^{\pm} に対応している。

ここで ε_{ij} は $\varepsilon_{\tau\sigma} = 1$ と規格化された反対称テンソルである。(4.4.37) を用いると、

$$S[g] = \frac{1}{1 + \eta^2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \eta^{ij} \text{Tr} \left(J_i^{L+} J_j^{L-} \right) \quad (4.4.38)$$

という表式を得る。

4.5 Left-right 双対性

この節では、 η 変形された主カイラル模型の left-right 双対性について 4 次元 CS 理論の立場から議論する。

先に言及したように、座標 w_R で貼られる空間は z_L のものとは異なる。しかしながら、これらのスペクトラルパラメータはある Möbius 変換で関係付いている [51]。

$$\frac{1}{w_R^2} = \frac{z_L + i\eta}{z_L - i\eta}. \quad (4.5.1)$$

実際、変換 (4.5.1) は rational 処方 of the twist function (3.3.31) から trigonometric 処方 of the twist function (4.1.5) へと次のように写像する。

$$\omega = \frac{1 - z_L^2}{z_L^2 + \eta^2} dz_L = \frac{4(e^{2\alpha} - w_R^2)(e^{2\alpha} w_R^2 - 1)}{(e^{4\alpha} - 1)w_R(w_R^2 - 1)^2} dw_R. \quad (4.5.2)$$

ここで変形パラメータの関係式 $\eta = i \tanh \alpha$ を使い、全体の規格化定数を簡単のため $K = 1 + \eta^2$ と置いている。変換 (4.5.1) は元来、squashed S^3 のシグマ模型における left-right 双対性を示すために見出されたものである [51]。

変換 (4.5.1) は w_R の 2 乗を含むため、 w_R のパラメータ領域を注意して扱わなければならない。(4.5.1) を w_R について解くと、

$$w_R = \begin{cases} \left(\frac{z_{L+} + i\eta}{z_{L+} - i\eta} \right)^{-1/2} & (\text{Re } w_R > 0) \\ - \left(\frac{z_{L-} + i\eta}{z_{L-} - i\eta} \right)^{-1/2} & (\text{Re } w_R < 0) \end{cases} \quad (4.5.3)$$

となる。この写像の意味するところは、 $z_{L\pm}$ でパラメトライズされるそれぞれの Riemann 面において、 $+i\eta$ と $-i\eta$ の間に branch cut が存在するということである。つまり、座標 w_R を持つ CP^\times (あるいは z_R でパラメトライズされる円柱) は、座標 $z_{L\pm}$ を持つ 2 つの CP^1 を branch cut を通して張り合わせたものと見なせる。[51] において、この大域的なスペクトラルパラメータの描像を用いることにより、 $\mathfrak{su}(2)$ のアファインチャージ代数のレベルでも left-right 双対性が明らかになった。

trigonometric 処方の Lax pair (4.4.10) を使うと。モノドロミー行列は次のように与えられる。

$$T^R(w_R) := \text{P exp} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \mathcal{L}_\sigma^R(\sigma; w_R) \right). \quad (4.5.4)$$

記号 P は通常の経路順序積である。Lax pair の τ 成分、 σ 成分は (2.1.3) と同様に

$$\mathcal{L}_\tau^R = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_+^R + \mathcal{L}_-^R), \quad \mathcal{L}_\sigma^R = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_+^R - \mathcal{L}_-^R) \quad (4.5.5)$$

と与えられることを思い出されたい。ここで左不変 1 形式 j は空間無限遠で 0 になるという境界条件を課している。 $T^R(w_R)$ を $w_R = 0$ と ∞ の周りでモノドロミーを展開することにより、量子アファイン代数 $\widehat{U}_q(\mathfrak{g}_R)$ の生成子を得ることができる [82]。モノドロミー行列の (あるいは保存チャージの) のレベルでの、rational 処方と trigonometric 処方の間の**大域的な**等価性はこれらの展開を用いることにより示される [51]。

Lax pair のレベルでの**局所的な**等価性も言及しておく価値があるだろう。つまり、Lax pair (4.4.11) は、rational 処方の Lax pair (3.3.45) と通常のゲージ変換

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\pm^R &= \frac{z_{L+}}{z_{L+} \pm 1} \left(1 \mp \frac{\eta(\eta \pm R)}{z_{L+}(1 \mp \eta R)} \right) j_\pm \\ &= g^{-1} \cdot \mathcal{L}_\pm^{L+}(z_{L+}) \cdot g + g^{-1} \partial_\pm g \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

で結びついている。ここで、スペクトラルパラメータの関係は

$$z_{L+} = \frac{\tanh \alpha}{\tanh z_R} \quad (4.5.7)$$

と与えられている。特筆すべきは z_R のパラメータ領域の半分

$$-\infty < \operatorname{Re} z_R < \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z_R < \frac{\pi}{2} \quad (4.5.8)$$

のみが覆われていることである。一方、パラメータ z_{L+} は \mathbb{C} の全領域を覆っている。

ここまでの議論は解 i) に関するものであった。解 ii) は新型の YB 変形を与えているため、より慎重にパラメータの変換を考える必要がある。さらに新型 YB 変形された作用は元の理論とは異なるため、left 処方に対応するものが存在するかも自明ではない。これは今後の課題である。

4.6 $SU(2)$ の特殊性

Section 4.4 では一般の半単純 Lie 代数 \mathfrak{g} を取り扱ったが、ここでは特に $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ の場合に成り立つ性質を議論する。 $SU(2)$ の場合、2つの解 i) $\tilde{j} = j$ と ii) $\tilde{j} = \exp(\pi\Sigma)j$ は局所的に等価であることがわかる。なぜならそれぞれ得られる作用 (4.4.13) と (4.4.29) は全微分項を除いて一致するからである。したがって、解 i) と解 ii) の間には何らかの関係性があることが期待されるだろう。実際これは正しく、2つの解は 4次元の意味で特異な (singular) ゲージ変換を通して結びついていることを述べる。

(4.4.18) における Lax pair $\mathcal{L}_{\pm}^{\text{Ri}}(z_{\text{R}})$ は (4.4.33) の Lax pair $\mathcal{L}_{\pm}^{\text{Rii}}(z_{\text{R}})$ と互いにゲージ変換

$$\mathcal{L}_{\pm}^{\text{Rii}}(z_{\text{R}}) = g_{(+)}^{-1} \cdot \mathcal{L}_{\pm}^{\text{Ri}}(z_{\text{R}}) \cdot g_{(+)} + g_{(+)}^{-1} \partial_{\pm} g_{(+)} \quad (4.6.1)$$

で移り変わることが直ちにわかる。ここで、 $g_{(\pm)} \in \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ は

$$g_{(\pm)} = \exp(\mp i(\log w_{\text{R}}) T_3) \quad (4.6.2)$$

と定義される。

変換 (4.6.1) は $\mathcal{L}^{\text{Rii}}(z_{\text{R}})$ から $\mathcal{L}^{\text{Ri}}(z_{\text{R}})$ への $g_{(\pm)}^{-1}$ を用いた形式的なゲージ変換であると見なせる。よってそれぞれの Lax pair に対する bulk EOM は変化しないものの、課された境界条件は当然異なるものである。これを境界条件のツイストとして明示的に見るために、 $\bar{g} \in SU(2)^{\mathbb{C}}$ を用いて Lax pair を

$$\mathcal{L}^{\text{R}} = \bar{g}^{-1} d\bar{g} \quad (4.6.3)$$

と表現しよう。特異的なゲージ変換を許すならば、いつでもこの形で表すことが可能である。何故なら、bulk EOM は \mathcal{L}^{R} がピュアゲージであることを意味しているからである。 $g_{(+)}^{-1} = \exp(i(\log w_{\text{R}}) T_3)$ による形式的なゲージ変換は、変換

$$\bar{g} \mapsto \bar{g}'_{(+)} = \bar{g} g_{(+)} = \bar{g} \exp(-i(\log w_{\text{R}}) T_3) \quad (4.6.4)$$

と z 成分に関するゲージ変換 (3.3.6) を行うことで実現される。境界条件 (4.3.4) を思い出すと、

$$\hat{g}^{-1} \partial_{\pm} \hat{g}|_{w_{\text{R}}=+1} = \mathcal{L}_{\pm}^{\text{R}}|_{w_{\text{R}}=+1} = \bar{g}^{-1} \partial_{\pm} \bar{g}|_{w_{\text{R}}=+1}, \quad (4.6.5)$$

$$\hat{g}^{-1} \partial_{\pm} \hat{g}|_{w_{\text{R}}=-1} = \mathcal{L}_{\pm}^{\text{R}}|_{w_{\text{R}}=-1} = \bar{g}^{-1} \partial_{\pm} \bar{g}|_{w_{\text{R}}=-1} \quad (4.6.6)$$

であることがわかる。もし、 $\bar{g}^{-1} d\bar{g}$ が boundary EOM の解 i) であるならば、

$$\bar{g}^{-1} \partial_{\pm} \bar{g}|_{w_{\text{R}}=+1} = \bar{g}^{-1} \partial_{\pm} \bar{g}|_{w_{\text{R}}=-1}, \quad (\Leftrightarrow \tilde{j} = j) \quad (4.6.7)$$

であるので、この時 $\bar{g}'_{(+)}^{-1} d\bar{g}'_{(+)}$ は

$$\bar{g}'_{(+)}^{-1} \partial_{\pm} \bar{g}'_{(+)}|_{w_{\text{R}}=+1} = \exp(\pi R) \bar{g}'_{(+)}^{-1} \partial_{\pm} \bar{g}'_{(+)}|_{w_{\text{R}}=-1}, \quad (\Leftrightarrow \tilde{j} = \exp(\pi R) j). \quad (4.6.8)$$

であり、確かにこれは解 ii) である。

以上より、4.4 の解 i) と ii) はトポロジカルには等価ではないが、 $\mathfrak{su}(2)$ の場合これらの配位は $w_{\text{R}} = 0, \infty$ で特異的な形式的ゲージ変換で結ばれているという結論を得る。

Chapter 5

コセット模型及びその Yang-Baxter 変形

前節では構造群がそのまま背景時空になる主カイラル模型に着目して、その YB 変形を 4 次元 CS 理論の立場から議論してきた。主カイラル模型では扱えない背景時空を取り扱える模型として、**対称コセットシグマ模型**がある。対称コセットとはある Lie 代数の \mathbb{Z}_2 -grading に着目して構成された商群であり、対称コセットシグマ模型はそれを背景時空にもつシグマ模型である。また、この対称コセットの拡張として \mathbb{Z}_4 -grading を持つ Lie superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ に基づいた supercoset に値をとるシグマ模型は、Green-Schwarz 形式の $\text{AdS}_5 \times S^5$ 超弦理論を記述することが知られている [85]。この節では [21] に基づき、これらのコセット構造やその可積分変形が 4 次元 CS 理論にどのように組み込まれるかを議論する。

5.1 対称コセットシグマ模型

この節では、対称コセットシグマ模型とその homogeneous 型 Yang-Baxter 変形を 4 次元 CS 理論 (3.3.2) の立場から導出する。この議論は [19, 20] の内容のある種の一般化と言える。対称コセット自体については [8] においても異なった視点から言及されている。

対称コセット

Lie 群 G とその部分群 H を考え、それぞれに対応する Lie 代数を \mathfrak{g} 、 \mathfrak{h} と書く。今、Lie 代数 \mathfrak{g} が \mathbb{Z}_2 -grading を持つと仮定する。つまり、 \mathfrak{g} はベクトル空間として分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ を持ち、以下の交換関係を満たしている。

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}, \quad [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{h}. \quad (5.1.1)$$

この時、 \mathfrak{m} は商群 G/H の生成子の張るベクトル空間になっている。この商群 G/H を対称コセットと呼ぶ。

ツイスト関数

対称コセットシグマ模型のツイスト関数は次のように与えられる。¹

$$\omega = \varphi_c(z) dz = \frac{16Kz}{(z-1)^2(z+1)^2} dz \quad (5.1.3)$$

ここでは [86] の表記に従っている。有理型 1 形式 ω は確かに実性条件 (3.3.28) を満たしている。 $\varphi_c(z)$ の極と零点の集合は

$$\mathfrak{p} = \{\pm 1\}, \quad \mathfrak{z} = \{0, \infty\} \quad (5.1.4)$$

である。これらの極は全て位数 2 の極であり、零点は位数 1 である。後に見るように、ツイスト関数 (5.1.3) は対称コセット模型に対して用いられるのみでなく、その homogeneous YB 変形も同じツイスト関数から導出される。

境界条件

2次元の可積分模型を同定するために、boundary EOM

$$\epsilon^{ij} \langle\langle (A_i, \partial_{\xi_p} A_i), \delta(A_j, \partial_{\xi_p} A_j) \rangle\rangle_p = 0, \quad p \in \mathfrak{p} \quad (5.1.5)$$

の解を 1 つ選ぶ必要がある。ここでの 2 重括弧は

$$\begin{aligned} \langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_p &:= (\text{res}_p \omega) \langle x, x' \rangle + (\text{res}_p \xi_p \omega) (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle) \\ &= 4pK (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle) \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

と定義されている。boundary EOM(5.1.5) の形は主カイラル模型の時と同様であることがわかる。

以下では 2 つのクラスの解を考える。対合 μ_t の固定点 $z = \pm 1$ と実性条件 (3.3.28)、(3.3.29) を仮定すると、 $A|_{z=\pm 1}$ と $\partial_z A|_{z=\pm 1}$ は実 Lie 代数 \mathfrak{g} に値を取ることに注意せよ。

一つ目のクラスとして

$$\text{i) } (A|_{z=1}, \partial_z A|_{z=1}) \in \{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}, \quad (A|_{z=-1}, \partial_z A|_{z=-1}) \in \{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}} \quad (5.1.7)$$

¹ツイスト関数 (5.1.3) はスペクトラルパラメータの変換

$$z = \frac{1+z'}{1-z'} \quad (5.1.2)$$

により、スペクトラルパラメータを z' とした主カイラル模型のものになる。この変換式が branch cut を持たないという事実は、これらがともに rational 処方に基づいていることを示している。

が考えられる。ここで $\{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}$ はアーベル化された \mathfrak{g} のコピーであり、つまり

$$\{0\} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}} := \{(0, x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \quad (5.1.8)$$

と定義される。この配位は明らかに boundary EOM の解になっており、対称コセットシグマ模型へと帰着するとを後に見る。

2つ目のクラスは

$$\text{ii) } \quad (A|_{z=1}, \partial_z A|_{z=1}) \in \mathfrak{g}_R, \quad (A|_{z=-1}, \partial_z A|_{z=-1}) \in \mathfrak{g}_{\tilde{R}} \quad (5.1.9)$$

で与えられる。ここで \mathfrak{g}_R 及び $\mathfrak{g}_{\tilde{R}}$ は

$$\mathfrak{g}_R := \{(2\eta R(x), x) \mid x \in \mathfrak{g}\}, \quad \mathfrak{g}_{\tilde{R}} := \{(-2\eta \tilde{R}(x), x) \mid x \in \mathfrak{g}\} \quad (5.1.10)$$

と定義されている。線形作用素 $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は hCYBE (2.2.24) を満たすものである。他方の R -作用素 $\tilde{R}: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は

$$\tilde{R} := f \circ R \circ f \quad (5.1.11)$$

と定義される。ここで $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は \mathbb{Z}_2 -grading を持つ \mathfrak{g} の自己同型写像である。この写像の明示的な表示は後の (5.1.22) にて与える。(5.1.22) における f に対して、 R が hCYBE(2.2.24) の解であるならば \tilde{R} もやはり hCYBE を満たすことが示される。さらに言うと、hCYBE のおかげで \mathfrak{g}_R は $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}_{\text{ab}}$ の部分代数になっており、 R 、 \tilde{R} の歪対称性はこの配位が boundary EOM(5.1.5) の解であることを保証している。境界条件 (5.1.9) の選択は homogeneous bi-YB 変形のものに動機付けられているとも言える。(詳細は Appendix G をみよ。) Appendix A で述べられているように、1つ目の配位 i) と2つ目の配位 ii) は β -変換で結ばれていることがわかる。

Lax 形式

シグマ模型の作用を導出するまえに、以下で用いられる記法をまとめておこう。ツイスト関数 (5.1.3) の各極に対して \hat{g} を

$$\hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=1} = g(\tau, \sigma), \quad \hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=-1} = \tilde{g}(\tau, \sigma), \quad (5.1.12)$$

ととる。ただし、 $g, \tilde{g} \in G$ である。実性条件 (3.3.30) により、 g や \tilde{g} は ($G^{\mathbb{C}}$ ではなく) 実 Lie 群 G に値を取る。関連する左不変カレントは

$$j := g^{-1}dg, \quad \tilde{j} := \tilde{g}^{-1}d\tilde{g} \quad (5.1.13)$$

と定義される。各極におけるゲージばと Lax 形式の関係は以下のように与えられる。

$$A|_{z=1} = -dgg^{-1} + \text{Ad}_g \mathcal{L}|_{z=1}, \quad A|_{z=-1} = -d\tilde{g}\tilde{g}^{-1} + \text{Ad}_{\tilde{g}} \mathcal{L}|_{z=-1}. \quad (5.1.14)$$

ツイスト関数 (5.1.3) も零点の配置から、Lax 形式に対して以下の仮設を置くことができる。

$$\mathcal{L} = (U_+ + zV_+)d\sigma^+ + (U_- + z^{-1}V_-)d\sigma^- \quad (5.1.15)$$

ここで、 $U_{\pm}, V_{\pm} \in \mathfrak{g}$ は σ, τ の未定関数で、光円錐座標は (2.1.1)(2.1.3) で与えられる。後に見るように Lax 形式の仮設 (5.1.15) は 2つのクラス i) ii) とともに扱うことができる。

i) 対称コセットシグマ模型

まずクラス i) が対称コセットシグマ模型を記述することをみよう。

境界条件 (5.1.7) の下、(5.1.14) の関係式は

$$j_{\pm} = U_{\pm} + V_{\pm}, \quad \tilde{j}_{\pm} = U_{\pm} - V_{\pm} \quad (5.1.16)$$

と書き直せる。これらの方程式を U_{\pm} と V_{\pm} について解くと、

$$U_{\pm} = \frac{j_{\pm} + \tilde{j}_{\pm}}{2}, \quad V_{\pm} = \frac{j_{\pm} - \tilde{j}_{\pm}}{2} \quad (5.1.17)$$

となる。結果的に、Lax pair は

$$\mathcal{L}_{\pm} = \frac{j_{\pm} + \tilde{j}_{\pm}}{2} + z^{\pm 1} \frac{j_{\pm} - \tilde{j}_{\pm}}{2}. \quad (5.1.18)$$

表される。次に $\varphi_c \mathcal{L}$ の $z = \pm 1$ における留数を評価すると、

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=1}(\varphi_c \mathcal{L}) &= 4K(V_+ d\sigma^+ - V_- d\sigma^-), \\ \text{res}_{z=-1}(\varphi_c \mathcal{L}) &= -4K(V_+ d\sigma^+ - V_- d\sigma^-) \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

がわかる。(5.1.19) を (3.3.25) に代入すると、2次元の作用が次のように得られる。

$$S[g, \tilde{g}] = K \int_{\mathcal{M}} \langle j_+ - \tilde{j}_+, j_- - \tilde{j}_- \rangle d\sigma \wedge d\tau. \quad (5.1.20)$$

もし \tilde{g} が g と独立であるならば、4次元 CS 理論のゲージ対称性を用いて、2次元の作用 (5.1.20) を Lie 群 G の主カイラル模型のものに書き直すことができる [8, 19]。

ここで、Section 4.4 で行なったように、 j と \tilde{j} の関係付けを考える。結果的として得られる作用 (5.1.20) が j と \tilde{j} の交換の下で不変であることがわかる。この不変性を尊重するならば、関係式 $\tilde{j} = f(j)$ における自己同型写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ が次の条件を満たすべきである。

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)], \quad f \circ f(x) = x, \quad x, y \in \mathfrak{g}. \quad (5.1.21)$$

f の具体形として、次のものを考える。

$$f(\mathbf{P}_{\hat{a}}) = -\mathbf{P}_{\hat{a}}, \quad f(\mathbf{J}_{\hat{a}}) = \mathbf{J}_{\hat{a}}. \quad (5.1.22)$$

ここで分解されたベクトル空間 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ の生成子を

$$\mathfrak{h} = \langle \mathbf{J}_{\hat{a}} \rangle, \quad \mathfrak{m} = \langle \mathbf{P}_{\hat{a}} \rangle \quad (5.1.23)$$

と導入している。ただし、 $\hat{a} = 1, \dots, \dim \mathfrak{h}$ 、 $\check{a} = 1, \dots, \dim \mathfrak{m}$ である。このような性質を満たす f を構成できる時、自己同型性から対称コセットの構造が自然に導入されていることがわかる。

自己同型写像 (5.1.22) を採用すると、 \tilde{j} は

$$\tilde{j} = f(j) = f(P_{(0)}(j) + P_{(2)}(j)) = P_{(0)}(j) - P_{(2)}(j) \quad (5.1.24)$$

と評価される。射影演算子 $P_{(0)}$ と $P_{(2)}$ はそれぞれ

$$P_{(0)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}, \quad P_{(2)} : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m} \quad (5.1.25)$$

と定義されている。(5.1.24) における \tilde{j} の標識を用いると、2次元の作用はさらに

$$S[g] = 4K \int_{\mathcal{M}} \langle j_+, P_{(2)}(j_-) \rangle d\sigma \wedge d\tau \quad (5.1.26)$$

と書き直すことができ、Lax pair (5.1.18) は

$$\mathcal{L}_{\pm} = P_{(0)}(j_{\pm}) + z^{\pm 1} P_{(2)}(j_{\pm}) \quad (5.1.27)$$

となる。これらは対称コセットシグマ模型の作用と Lax pair の標準的な表式である。

ii) homogeneous YB 変形

次に (5.1.9) のクラス ii) が対称コセットシグマ模型の homogeneous YB 変形を記述していることを見よう。

条件 (5.1.9) は、ツイスト関数の各極でゲージ場 A に以下の拘束を与える。

$$A|_{z=1} = 2\eta R(\partial_z A|_{z=1}), \quad A|_{z=-1} = -2\eta \tilde{R}(\partial_z A|_{z=-1}). \quad (5.1.28)$$

ここでも Lax 形式に対する仮設 (5.1.15) を仮定する。条件 (5.1.28) は

$$j_{\pm} = U_{\pm} + (1 \mp 2\eta R_g)(V_{\pm}), \quad \tilde{j}_{\pm} = U_{\pm} - (1 \mp 2\eta \tilde{R}_{\tilde{g}})(V_{\pm}) \quad (5.1.29)$$

と解くことができる。ここで R_g は随伴作用 (3.3.42) と R を用いて

$$R_g := \text{Ad}_{g^{-1}} \circ R \circ \text{Ad}_g \quad (5.1.30)$$

と定義されている。これらの方程式を U_{\pm} と V_{\pm} に対して解くと以下の表式を得る。

$$U_{\pm} = \frac{j_{\pm} + \tilde{j}_{\pm}}{2} \pm \eta(R_g - \tilde{R}_{\tilde{g}})(V_{\pm}), \quad V_{\pm} = \frac{1}{1 \mp \eta R_g \mp \eta \tilde{R}_{\tilde{g}}} \left(\frac{j_{\pm} - \tilde{j}_{\pm}}{2} \right). \quad (5.1.31)$$

$z = \pm 1$ における $\varphi_c \mathcal{L}$ の留数は (5.1.19) と同じ形であるが、 V_{\pm} は (5.1.31) と置き換わっているため、得られる 2次元の作用は

$$S[g, \tilde{g}] = 4K \int_{\mathcal{M}} \left\langle \frac{j_+ - \tilde{j}_+}{2}, \frac{1}{1 + \eta R_g + \eta \tilde{R}_{\tilde{g}}} \left(\frac{j_- - \tilde{j}_-}{2} \right) \right\rangle d\sigma \wedge d\tau \quad (5.1.32)$$

で与えられる。今の場合、結果的な作用は j と \tilde{j} の入れ替えというより、 g と \tilde{g} の入れ替えに対して不変であることに注意せよ。

作用の交換対称性 (5.1.32) を尊重するためには前節で課した対合を群要素のレベルで定義する必要がある。つまり、 $g, \tilde{g} \in G$ に対して次の条件を課す。

$$\tilde{g} = F(g). \quad (5.1.33)$$

ここで自己同型写像 $F: G \rightarrow G$ は \mathbb{Z}_2 -grading の性質 $F \circ F(g) = g$ を持つ。 F の具体的な表現を定めるために、 $g \in G$ を parametrization

$$g = \exp\left(X^{\hat{a}} \mathbf{P}_{\hat{a}} + X^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}\right) \quad (5.1.34)$$

を指定する。ここで $X^{\hat{a}}$ 及び $X^{\hat{a}}$ は τ と σ の関数である。 G の単位元の近傍では、 $F(g)$ は自己同型写像 $f: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ を用いて

$$F(g) := \exp\left(X^{\hat{a}} f(\mathbf{P}_{\hat{a}}) + X^{\hat{a}} f(\mathbf{J}_{\hat{a}})\right), \quad (5.1.35)$$

あるいは同じことであるが、

$$F(g) = \exp\left(-X^{\hat{a}} \mathbf{P}_{\hat{a}} + X^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}\right) \quad (5.1.36)$$

と定義される。

2次元の作用 (5.1.32) に (5.1.33) を要請することで書き直しを行おう。Appendix F.1 で示されるように、dressed R -作用素 R_g と $\tilde{R}_{\tilde{g}}$ は以下の関係式を満たす。

$$(R_g + \tilde{R}_{\tilde{g}}) \circ P_{(2)}(x) = 2P_{(2)} \circ R_g \circ P_{(2)}(x). \quad (5.1.37)$$

関係式 (5.1.37) を用いると、 V_{\pm} の表式は

$$V_{\pm} = P_{(2)} \left(\frac{1}{1 \mp 2\eta R_g \circ P_{(2)}} j_{\pm} \right) \quad (5.1.38)$$

となる。さらに、(5.1.38) を用いて U_{\pm} も

$$U_{\pm} = j_{\pm} - (1 \mp \eta R_g)(V_{\pm}) = P_{(0)} \left(\frac{1}{1 \mp 2\eta R_g \circ P_{(2)}} j_{\pm} \right) \quad (5.1.39)$$

と書き直される。結果的に、2次元の作用

$$S[g] = 4K \int_{\mathcal{M}} \left\langle j_{-}, P_{(2)} \left(\frac{1}{1 - 2\eta R_g \circ P_{(2)}} j_{+} \right) \right\rangle d\sigma \wedge d\tau \quad (5.1.40)$$

と Lax pair

$$\mathcal{L}_{\pm} = P_{(0)} \left(\frac{1}{1 \mp 2\eta R_g \circ P_{(2)}} j_{\pm} \right) + z^{\pm 1} P_{(2)} \left(\frac{1}{1 \mp 2\eta R_g \circ P_{(2)}} j_{\pm} \right) \quad (5.1.41)$$

を得る。これらは homogeneous YB 変形された対称コセット模型の作用と Lax pair の標準的な表式 [87] である。

5.2 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 超弦理論の Yang-Baxter 変形

この節では、 $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 上の超弦理論の Green-Schwarz(GS) 作用 [85] のを 4次元 CS 理論の立場から議論する。また、その homogeneous YB 変形 [47] を導出する。

Supercoset

GS 形式の $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 超弦理論作用は次の *supercoset* に基づいている。

$$\frac{PSU(2, 2|4)}{SO(1, 4) \times SO(5)}. \quad (5.2.1)$$

4次元 CS 作用の (3.3.2) のゲージ場 A は Lie superalgebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2, 2|4)$ に値を取る。通常、この Lie superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の表現として、supertraceless と実性を課した supermatrix を用いる。 $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ のコセット構造については Appendix E を見よ。これに伴い、ブラケット $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は supertrace Str に読み替えれば良い。

ツイスト関数

$\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ のポアソン構造は [40, 41] において解析され、そのツイスト関数は次のように与えられる。

$$\omega = \varphi_{\text{str}}(z) dz = \frac{4z^3}{(z^4 - 1)^2} dz. \quad (5.2.2)$$

これは通常の対合 μ_t の下で不変である。

$$\overline{\varphi_{\text{str}}(z)} = \varphi_{\text{str}}(\bar{z}). \quad (5.2.3)$$

(5.2.2) のツイスト関数極と零点は次のように与えられる。

$$\mathfrak{p} = \{+1, -1, +i, -i\}, \quad \mathfrak{z} = \{0, \infty\}, \quad (5.2.4)$$

これらの極は位数 2 の極で、零点は位数 3 である。

境界条件

これらに関する boundary EOM は

$$\epsilon^{ij} \langle\langle (A_i, \partial_{\xi_p} A_i), \delta(A_j, \partial_{\xi_p} A_j) \rangle\rangle_p = 0, \quad p \in \mathfrak{p} \quad (5.2.5)$$

となる。ここでの 2 重括弧は

$$\begin{aligned} \langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_p &:= (\text{res}_p \omega) \text{Str}(x \cdot x') + (\text{res}_p \xi_p \omega) (\text{Str}(x \cdot y') + \text{Str}(x' \cdot y)) \\ &= \frac{p}{4} (\text{Str}(x \cdot y') + \text{Str}(x' \cdot y)) \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

と定義される。

対称コセットの場合と同様に boundary EOM(5.2.5) の解として 2 つのクラスを考えることができる。実性条件からこれらの境界条件に課される拘束を評価しよう。反線形作用素 τ の作用が

$$\begin{aligned} \tau((\partial_z A)|_{z=p}) &= (\tau(\partial_z A))|_{z=p} = (\partial_{\bar{z}}(\tau A))|_{z=p} = (\mu_t^*(\partial_z A))|_{z=p} \\ &= (\partial_z A)|_{z=\bar{p}} \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

と与えられることを踏まえると、実性条件 (3.3.29) は

$$(\tau(A)|_{z=p}, \tau(\partial_z A)|_{z=p}) = (A|_{z=\bar{p}}, (\partial_z A)|_{z=\bar{p}}) \quad (5.2.8)$$

を意味する。(5.2.8) によると、 $z = \pm i$ での境界条件は

$$(\partial_z A)|_{z=+i} = (\partial_z A)|_{z=-i} \quad \left(\in \mathfrak{su}(2, 2|4)^{\mathbb{C}} \right) \quad (5.2.9)$$

の関係で結ばれていることがわかる。

AdS₅ × S⁵ supercoset シグマ模型に対しては、次の解を考える。

$$\text{i) } (A|_{z=p}, \partial_z A|_{z=p}) \in \{0\} \times \mathfrak{su}(2, 2|4)_{p,\text{ab}} \quad (p \in \mathfrak{p}). \quad (5.2.10)$$

$\mathfrak{su}(2, 2|4)_{p,ab}$ は $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ 、 $\mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C}$ の可換化されたコピーであり、

$$\mathfrak{su}(2, 2|4)_{p,ab} := \begin{cases} \mathfrak{su}(2, 2, |4) & \text{for } p = \pm 1 \\ \mathfrak{su}(2, 2, |4)^\mathbb{C} & \text{for } p = \pm i. \end{cases} \quad (5.2.11)$$

と定義される。2つ目の選択として $\text{AdS}_5 \times S^5$ supercoset シグマ模型の homogeneous YB 変形を与える

$$\text{ii) } \quad (A|_{z=p}, \partial_z A|_{z=p}) \in \mathfrak{su}(2, 2|4)_{p, R_{n_p}} \quad (p \in \mathfrak{p}) \quad (5.2.12)$$

が考えられる。ここで R の添字 n_p はそれぞれの極のラベルであり $(n_1, n_i, n_{-1}, n_{-i}) := (1, 2, 3, 4)$ と定義する。さらに $\mathfrak{su}(2, 2|4)_{p, R_{n_p}}$ は以下の通り定義される。

$$\mathfrak{su}(2, 2|4)_{p, R_{n_p}} := \begin{cases} \left\{ (p \eta R_{n_p}(x), x) \mid x \in \mathfrak{su}(2, 2|4) \right\} & \text{for } p = \pm 1 \\ \left\{ (p \eta R_{n_p}(x), x) \mid x \in \mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C} \right\} & \text{for } p = \pm i. \end{cases} \quad (5.2.13)$$

ここで線形作用素 $R_k : \mathfrak{g}^\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{g}^\mathbb{C}$ ($k = 1, 2, 3, 4$) の定義は

$$R_k := f_s^{k-1} \circ R \circ f_s^{-(k-1)} \quad (5.2.14)$$

と与えられる。 R -作用素 $R : \mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C}$ は hCYBE(2.2.24) の解であり、 $f_s : \mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C} \rightarrow \mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C}$ は \mathbb{Z}_4 -grading を持つ自己同型写像である。この写像の明示的な表現は (5.2.27) で与える。この表現に対して、 R が hCYBE(2.2.24) の解であるならば、 R_k もやはり $\mathfrak{su}(2, 2|4)^\mathbb{C}$ に対する hCYBE の解になっていることが示される。従って、境界条件 (5.2.12) は確かに boundary EOM(5.2.5) と archipelago 条件を満たす解である。

Lax 形式

対称コセットシグマ模型の場合と同様に、ツイスト関数 (5.2.2) の各極での \hat{g} の値を

$$\begin{aligned} \hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=1} &= g_1(\tau, \sigma), & \hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=i} &= g_2(\tau, \sigma), \\ \hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=-1} &= g_3(\tau, \sigma), & \hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=-i} &= g_4(\tau, \sigma), \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

と定める。それぞれの群要素は $g_k \in SU(2, 2|4)$ ($k = 1, 3$), $g_k \in SU(2, 2|4)^\mathbb{C}$ ($k = 2, 4$) である。ただし $k = 2, 4$ に対しては実性条件から、

$$\tilde{\tau} g_2 = g_4 \quad (5.2.16)$$

が課されることに注意されたい。これらを用いて左不変カレントは

$$j_1 := g_1^{-1} dg_1, \quad j_2 := g_2^{-1} dg_2, \quad j_3 := g_3^{-1} dg_3, \quad j_4 := g_4^{-1} dg_4 \quad (5.2.17)$$

と定義される。ゲージ場 A と Lax pair \mathcal{L} の各極での関係は次のように書ける。

$$\begin{aligned} A|_{z=1} &= -dg_1g_1^{-1} + \text{Ad}_{g_1}\mathcal{L}|_{z=1}, & A|_{z=i} &= -dg_2g_2^{-1} + \text{Ad}_{g_2}\mathcal{L}|_{z=i}, \\ A|_{z=-1} &= -dg_3g_3^{-1} + \text{Ad}_{g_3}\mathcal{L}|_{z=-1}, & A|_{z=-i} &= -dg_4g_4^{-1} + \text{Ad}_{g_4}\mathcal{L}|_{z=-i}. \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

また、ツイスト関数 (5.2.2) の零点の構造から、Lax 形式に対して次の仮説を立てる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(z^{-1} V_+^{[-1]} + V_+^{[0]} + z V_+^{[1]} + z^2 V_+^{[2]} \right) d\sigma^+ \\ &\quad + \left(z^{-2} V_-^{[-2]} + z^{-1} V_-^{[-1]} + V_-^{[0]} + z V_-^{[1]} \right) d\sigma^-, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

ここで、実性条件 $\tau\mathcal{L} = \mu_t^*\mathcal{L}$ より、滑らかな関数 $V_\pm^{[n]}$ ($n = -1, 0, 1$), $V_\pm^{[\pm 2]} : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{su}(2, 2|4)$ の値域が実 Lie 代数となる。後で見るように、仮説 (5.2.19) は両方のクラスの解に適用できる。注意すべきなのは、仮説 (5.2.19) は唯一のものではなく、他の仮説の取り方により pure spinor 形式の超弦の作用を導くことができる [8]。

i) AdS₅ × S⁵ supercoset シグマ模型

AdS₅ × S⁵ supercoset シグマ模型の GS 作用を 4 次元 CS 理論 (3.3.2) から導出しよう。

境界条件 (5.2.10) より

$$\begin{aligned} j_{1,\pm} &= V_\pm^{[0]} + V_\pm^{[\pm 2]} + V_\pm^{[1]} + V_\pm^{[-1]}, \\ j_{2,\pm} &= V_\pm^{[0]} - V_\pm^{[\pm 2]} + i V_\pm^{[1]} - i V_\pm^{[-1]}, \\ j_{3,\pm} &= V_\pm^{[0]} + V_\pm^{[\pm 2]} - V_\pm^{[1]} - V_\pm^{[-1]}, \\ j_{4,\pm} &= V_\pm^{[0]} - V_\pm^{[\pm 2]} - i V_\pm^{[1]} + i V_\pm^{[-1]} \end{aligned} \quad (5.2.20)$$

を得る。 $V_\pm^{[n]}$ に関してこれらの方程式を解くと次のようになる。

$$\begin{aligned} V_\pm^{[0]} &= \frac{j_{1,\pm} + j_{2,\pm} + j_{3,\pm} + j_{4,\pm}}{4}, & V_\pm^{[\pm 2]} &= \frac{j_{1,\pm} - j_{2,\pm} + j_{3,\pm} - j_{4,\pm}}{4}, \\ V_\pm^{[1]} &= \frac{j_{1,\pm} - i j_{2,\pm} - j_{3,\pm} + i j_{4,\pm}}{4}, & V_\pm^{[-1]} &= \frac{j_{1,\pm} + i j_{2,\pm} - j_{3,\pm} - i j_{4,\pm}}{4}. \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

必要な留数 $\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L})$ ($p \in \mathfrak{p}$) 以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \text{res}_{\pm 1}(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}) &= \frac{1}{8} \left(j_{1,+} - (1 \pm i)j_{2,+} + j_{3,+} - (1 \mp i)j_{4,+} \right) d\sigma^+ \\ &\quad + \frac{1}{8} \left(-j_{1,-} + (1 \mp i)j_{2,-} - j_{3,-} + (1 \pm i)j_{4,-} \right) d\sigma^-, \\ \text{res}_{\pm i}(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}) &= \frac{1}{8} \left(-(1 \mp i)j_{1,+} + j_{2,+} - (1 \pm i)j_{3,+} + j_{4,+} \right) d\sigma^+ \\ &\quad + \frac{1}{8} \left((1 \pm i)j_{1,-} - j_{2,-} + (1 \mp i)j_{3,-} - j_{4,-} \right) d\sigma^-. \end{aligned} \quad (5.2.22)$$

ここで、集合 $\{\text{res}_{\pm 1}(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}), \text{res}_{\pm i}(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L})\}$ は g_k ($k = 1, \dots, 4$) のサイクリックな入れ替えに対して不変であることを注意せよ。この事実は、得られる 2次元の作用もこの対称性を持つことを意味している。実際、(5.2.22) を用いると 2次元の作用は

$$S[g_k] = \frac{1}{16} \int_{\mathcal{M}} \text{Str} \left[\sum_{\sigma \in S^4} \left(j_{\sigma(1),+} - (1+i)j_{\sigma(2),+} + j_{\sigma(3),+} - (1-i)j_{\sigma(4),+} \right) j_{\sigma(1),-} \right. \\ \left. - \left(-j_{\sigma(1),-} + (1-i)j_{\sigma(2),-} - j_{\sigma(3),-} + (1+i)j_{\sigma(4),-} \right) j_{\sigma(1),+} \right] d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \quad (5.2.23)$$

と求まる。ここで $\sigma \in S^4$ は集合 $\{1, 2, 3, 4\}$ のサイクリックな置換である。作用 (5.2.23) は明らかに j_k のサイクリックな入れ替えに対して不変である。

さらに j_k ($k = 1, \dots, 4$) を関係付けることを考える。2次元の作用 (5.2.23) のサイクリック対称性より、以下の関係式を要請する。

$$j_k = f_s^{k-1}(j) \quad (k = 1, \dots, 4), \quad (5.2.24)$$

ここで $j \in \mathfrak{su}(2, 2|4)$ は $g \in SU(2, 2|4)$ による左不変カレントである。写像 $f_s : \mathfrak{su}(2, 2|4)^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{su}(2, 2|4)^{\mathbb{C}}$ は $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の自己同型写像であり、 \mathbb{Z}_4 -grading の性質 $f_s^4 = \text{Id}$ を満たすものである。よく知られているように superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ は \mathbb{Z}_4 -grading を持った次の部分空間への分解が知られている。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)}. \quad (5.2.25)$$

$\mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)}$ 及び $\mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)}$ はそれぞれ $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の bosonic part と fermionic part であり、 $\mathfrak{g}^{(0)}$ は bosonic part の部分群 $\mathfrak{so}(1, 4) \times \mathfrak{so}(5)$ と同定することができる。 $\mathfrak{g}^{(m)}$ の交換関係は

$$[\mathfrak{g}^{(m)}, \mathfrak{g}^{(n)}] \subset \mathfrak{g}^{(k)} \quad (m+n = k \pmod{4}) \quad (5.2.26)$$

を満たす。GS 作用を得るために、 \mathbb{Z}_4 -grading を持つ自己同型写像 f_s の各固有空間が $\mathfrak{g}^{(k)}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) となるように取ろう。つまり、

$$f_s(\mathfrak{g}^{(k)}) = i^k \mathfrak{g}^{(k)} \quad (5.2.27)$$

であり、これは \mathbb{Z}_4 -grading (5.2.26) と整合的である。² $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ を supermatrix によって表現した後、 f_s の具体的な表式を与えられる。(詳しくは [88]) を見よ。

²あるいは逆に自己同型写像 f_s の固有空間への分解が \mathbb{Z}_4 -grading を誘導すると考えても自然である。

付加的な条件 (5.2.24) により、関数 $V^{[n]}$ は \mathbb{Z}_4 -grading の各要素は $j_{\pm}^{(k)} \in \mathfrak{g}^{(k)}$ と表現できる。実際、(5.2.24) と (5.2.27) を用いると、左不変カレントは次のように書き直せる。

$$\begin{aligned} j_{1,\pm} &= j_{\pm}^{(0)} + j_{\pm}^{(1)} + j_{\pm}^{(2)} + j_{\pm}^{(3)}, & j_{2,\pm} &= j_{\pm}^{(0)} + i j_{\pm}^{(1)} - j_{\pm}^{(2)} - i j_{\pm}^{(3)}, \\ j_{3,\pm} &= j_{\pm}^{(0)} - j_{\pm}^{(1)} + j_{\pm}^{(2)} - j_{\pm}^{(3)}, & j_{4,\pm} &= j_{\pm}^{(0)} - i j_{\pm}^{(1)} - j_{\pm}^{(2)} + i j_{\pm}^{(3)}. \end{aligned} \quad (5.2.28)$$

よって (5.2.28) を (5.2.21) に代入すると、関数 $V^{[n]}$ は

$$V_{\pm}^{[0]} = j_{\pm}^{(0)}, \quad V_{\pm}^{[\pm 2]} = j_{\pm}^{(2)}, \quad V_{\pm}^{[1]} = j_{\pm}^{(1)}, \quad V_{\pm}^{[-1]} = j_{\pm}^{(3)} \quad (5.2.29)$$

と与えられる。この結果から、直ちに次の Lax pair を得られる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \left(z^{-1} j_{+}^{(3)} + j_{+}^{(0)} + z j_{+}^{(1)} + z^2 j_{+}^{(2)} \right) d\sigma^{+} \\ &\quad + \left(z^{-2} j_{-}^{(2)} + z^{-1} j_{-}^{(3)} + j_{-}^{(0)} + z j_{-}^{(1)} \right) d\sigma^{-}. \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

この表式 (5.2.30) はまさしく [39] において構成された AdS₅ × S⁵ 超弦の Lax pair である。

次に 2次元の作用 (5.2.23) を評価しよう。(5.2.29) を用いると、2次元の作用に対する各極からの寄与はどれも等しい。つまり、

$$\text{Str} \left(\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}) \wedge g_p^{-1} dg_p \right) = \frac{1}{2} \text{Str} (j_{-} d_{+}(j_{+})) d\sigma^{+} \wedge d\sigma^{-} \quad (5.2.31)$$

であり、ここで作用素 d_{\pm} は各固有空間への射影演算子 $P^{(i)}$ の線形結合により

$$d_{\pm} := \pm P^{(1)} + 2P^{(2)} \mp P^{(3)} \quad (5.2.32)$$

と定義されている。この性質は作用 (5.2.23) のサイクリック対称性から従っている。結果として、

$$S[g_i] = \int_{\mathcal{M}} \text{Str} (j_{-} d_{+}(j_{+})) d\sigma^{+} \wedge d\sigma^{-} \quad (5.2.33)$$

を得る。これは AdS₅ × S⁵ 超弦の Metsaev-Tseytlin 作用 [85] に他ならない。

ii) homogeneous YB 変形

ここでは AdS₅ × S⁵ supercoset シグマ模型の homogeneous YB 変形 [47] について議論する。

境界条件は先に述べた (5.2.12) を採用する。記法の混乱を避けるために、(5.2.19) に現れる Lax pair の未定関数 $V_{\pm}^{[n]}$ を以下では $\bar{V}_{\pm}^{[n]} (\in \mathfrak{su}(2, 2|4))$ に置き換える。すると、境界条件 (5.2.12) から関係式

$$\begin{aligned} j_{1,\pm} &= \bar{V}_{\pm}^{[0]} + (1 \mp 2\eta R_{g_1}) \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} + (1 - \eta R_{g_1}) \bar{V}_{\pm}^{[1]} + (1 + \eta R_{g_1}) \bar{V}_{\pm}^{[-1]}, \\ j_{2,\pm} &= \bar{V}_{\pm}^{[0]} - (1 \mp 2\eta R_{g_2}) \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} + i(1 - \eta R_{g_2}) \bar{V}_{\pm}^{[1]} - i(1 + \eta R_{g_2}) \bar{V}_{\pm}^{[-1]}, \\ j_{3,\pm} &= \bar{V}_{\pm}^{[0]} + (1 \mp 2\eta R_{g_3}) \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} - (1 - \eta R_{g_3}) \bar{V}_{\pm}^{[1]} - (1 + \eta R_{g_3}) \bar{V}_{\pm}^{[-1]}, \\ j_{4,\pm} &= \bar{V}_{\pm}^{[0]} - (1 \mp 2\eta R_{g_4}) \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} - i(1 - \eta R_{g_4}) \bar{V}_{\pm}^{[1]} + i(1 + \eta R_{g_4}) \bar{V}_{\pm}^{[-1]} \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

を得る。ここで、dressed R -作用素 R_{g_k} ($k = 1, \dots, 4$) を

$$R_{g_k} := \text{Ad}_{g_k}^{-1} \circ R_k \circ \text{Ad}_{g_k}. \quad (5.2.35)$$

と定義した。これらの線形結合により線形作用素

$$\mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(p)} = \frac{1}{4} (R_{g_1} + i^p R_{g_2} + i^{2p} R_{g_3} + i^{3p} R_{g_4}) \quad (5.2.36)$$

を導入すると、方程式 (5.2.34) は

$$\begin{aligned} V_{\pm}^{[0]} &= \bar{V}_{\pm}^{[0]} \mp 2\eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(2)} \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} - \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(1)} \bar{V}_{\pm}^{[1]} + \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(3)} \bar{V}_{\pm}^{[-1]}, \\ V_{\pm}^{[1]} &= \mp 2\eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(1)} \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} + (1 - \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(0)}) \bar{V}_{\pm}^{[1]} + \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(2)} \bar{V}_{\pm}^{[-1]}, \\ V_{\pm}^{[\pm 2]} &= (1 \mp 2\eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(0)}) \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} - \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(3)} \bar{V}_{\pm}^{[1]} + \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(1)} \bar{V}_{\pm}^{[-1]}, \\ V_{\pm}^{[-1]} &= \mp 2\eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(3)} \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} - \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(2)} \bar{V}_{\pm}^{[1]} + (1 + \eta \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(0)}) \bar{V}_{\pm}^{[-1]} \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

と書き直せる。ここでの関数 $V_{\pm}^{[n]}$ はクラス i) で用いた表式 (5.2.21) のものである。作用素 $\mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(p)}$ は歪対称であるため、 $\bar{V}_{\pm}^{[n]}$ に関する方程式 (5.2.37) は一意に解くことができる。これにより 2次元の作用を具体的に書き下すことができるが、その形はやや複雑であるため、明示的な表式を記す代わりに 2次元作用における g_k ($k = 1, \dots, 4$) のサイクリックな入れ替えに対する対称性のみを示すこととしよう。

そのために、まずサイクリック写像

$$P : g_k \mapsto g_{k+1}, \quad (5.2.38)$$

を定義しよう。この変換の下で、線形作用素 (5.2.36) における線形作用素 $\mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(p)}$ と (5.2.21) における関数 $V_{\pm}^{[n]}$ は次のように移り変わる。

$$P(\mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(p)}) = i^{3p} \mathbf{R}_{\mathbf{g}}^{(p)}, \quad (5.2.39)$$

$$\begin{aligned} P(V_{\pm}^{[0]}) &= V_{\pm}^{[0]}, & P(V_{\pm}^{[\pm 2]}) &= -V_{\pm}^{[\pm 2]}, \\ P(V_{\pm}^{[1]}) &= i V_{\pm}^{[1]}, & P(V_{\pm}^{[-1]}) &= -i V_{\pm}^{[-1]}. \end{aligned} \quad (5.2.40)$$

(5.2.39) と (5.2.40) の変換則、及び方程式 (5.2.37) を用いると関数 $\bar{V}_{\pm}^{[n]}$ もやはり $V_{\pm}^{[n]}$ と同じ変換をすることがわかる。

$$\begin{aligned} P(\bar{V}_{\pm}^{[0]}) &= \bar{V}_{\pm}^{[0]}, & P(\bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]}) &= -\bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]}, \\ P(\bar{V}_{\pm}^{[1]}) &= i \bar{V}_{\pm}^{[1]}, & P(\bar{V}_{\pm}^{[-1]}) &= -i \bar{V}_{\pm}^{[-1]}. \end{aligned} \quad (5.2.41)$$

この事実により、留数 $\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L})$ ($p \in \mathfrak{p}$) が

$$P(\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L})) = \text{res}_{p+1}(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}) \quad (5.2.42)$$

を満たしていることがわかる。なぜならば、 $\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L})$ ($p \in \mathfrak{p}$) は具体的に

$$\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}) = \frac{1}{4} \left(i^{n_p-1} \bar{V}_+^{[1]} + 2i^{2(n_p-1)} \bar{V}_+^{[2]} - i^{3(n_p-1)} \bar{V}_+^{[-1]} \right) d\sigma^+ \quad (5.2.43)$$

$$+ \frac{1}{4} \left(i^{n_p-1} \bar{V}_-^{[1]} - 2i^{2(n_p-1)} \bar{V}_-^{[2]} - i^{3(n_p-1)} \bar{V}_-^{[-1]} \right) d\sigma^- \quad (5.2.44)$$

と与えられるからである。従って、2次元作用 (3.3.25) は g_k ($k = 1, \dots, 4$) のサイクリックな置換に対して不変である。

クラス i) の時と同様に、上記のサイクリック対称性の存在は付加条件

$$g_k = F_s^{k-1}(g) \quad (k = 1, \dots, 4) \quad (5.2.45)$$

を正当化する。ここで $g \in SU(2, 2|4)$ であり、自己同型写像 $F_s : SU(2, 2|4) \rightarrow SU(2, 2|4)$ は $F_s^4 = 1$ を満たすように定義する。対称コセットの場合と同様に、(5.2.27) で定義された f_s によって誘導された F_s を考える。より具体的には、群要素 $g \in SU(2, 2|4)$ を

$$g = \exp \left(\sum_{k=0}^3 X^{A_k} T_{A_k}^{(k)} \right), \quad T_{A_k}^{(k)} \in \mathfrak{g}^{(k)} \quad (A_k = 1, \dots, \dim \mathfrak{g}^{(k)}) \quad (5.2.46)$$

とパラメトライズした時、自己同型写像 F_s は

$$F_s(g) := \exp \left(\sum_{k=0}^3 X^{A_k} f_s(T_{A_k}^{(k)}) \right) = \exp \left(\sum_{k=0}^3 i^k X^{A_k} T_{A_k}^{(k)} \right) \quad (5.2.47)$$

と誘導される。 X^{A_k} は τ, σ の関数である。定義より、 F_s は実際 \mathbb{Z}_4 -grading の性質を持つ $SU(2, 2|4)$ の自己同型写像になっている。

Appendix F.2 で示されるように、dressed R -作用素 R_{g_k} は f_s の各固有空間への射影演算子 $P^{(k)}$ との間に次の関係を持つ。

$$P^{(m)} \circ R_{g_k} \circ P^{(n)} = i^{(m-n)(k-1)} P^{(m)} \circ R_g \circ P^{(n)}. \quad (5.2.48)$$

(5.2.36) を思い出すと、さらに次の関係が従う。

$$P^{(m)} \circ \mathbf{R}_{\mathfrak{g}}^{(p)} \circ P^{(n)} = \begin{cases} P^{(m)} \circ R_g \circ P^{(n)} & m - n + p = 0 \pmod{4} \\ 0 & m - n + p \neq 0 \pmod{4} \end{cases}. \quad (5.2.49)$$

(5.2.49) を用いると、方程式 (5.2.37) は

$$\bar{V}_{\pm}^{[0]} = J_{\pm}^{(0)}, \quad \bar{V}_{\pm}^{[\pm 2]} = J_{\pm}^{(2)}, \quad \bar{V}_{\pm}^{[1]} = J_{\pm}^{(1)}, \quad \bar{V}_{\pm}^{[-1]} = J_{\pm}^{(3)} \quad (5.2.50)$$

と解ける。ここで変形されたカレント J_{\pm} は

$$J_{\pm} := \frac{1}{1 \mp \eta R_g \circ d_{\pm}} j_{\pm} \quad (5.2.51)$$

と定義されている。従って Lax pair は

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \left(z^{-1} J_{+}^{(3)} + J_{+}^{(0)} + z J_{+}^{(1)} + z^2 J_{+}^{(2)} \right) d\sigma^{+} \\ & + \left(z^{-2} J_{-}^{(2)} + z^{-1} J_{-}^{(3)} + J_{-}^{(0)} + z J_{-}^{(1)} \right) d\sigma^{-} \end{aligned} \quad (5.2.52)$$

となることがわかる。これはまさしく homogeneous YB 変形された $\text{AdS}_5 \times S^5$ の Lax pair [47] である。

最後にこの Lax pair をもつ 2次元の作用を導出しよう。(5.2.50) を考慮すると、各極からの 2次元の作用への寄与は同一であることがわかる。つまり、

$$\text{Str} \left(\text{res}_p(\varphi_{\text{str}} \mathcal{L}) \wedge g_p^{-1} dg_p \right) = \frac{1}{2} \text{Str} (j_{-} d_{+}(J_{+})) d\sigma^{+} \wedge d\sigma^{-} \quad (5.2.53)$$

である。結果的に、作用

$$S[g] = \int_{\mathcal{M}} \text{Str} (j_{-} d_{+}(J_{+})) d\sigma^{+} \wedge d\sigma^{-} \quad (5.2.54)$$

を得る。この作用 (5.2.54) は homogeneous YB 変形された $\text{AdS}_5 \times S^5$ の作用 [47] である。

Chapter 6

Faddeev-Reshetikhin 模型

Chapter 4, Chapter 5 で考えた主カイラル模型やコセットシグマ模型などの非線形シグマ模型は、弦理論の文脈では世界面上のシグマ模型に対応する。これらの模型は AdS/CFT 対応における可積分構造を調べる上で重要な反面、2 次元の可積分な場の理論で厳密解を求める手法である量子逆散乱法が適用できないという難点がある。この難点は Chapter 1 で述べたように、非線形シグマ模型の Poisson 構造の non-ultralocality に起因する。Faddeev と Reshetikhin の仕事 [52] に始まり、[62–64] において詳しく議論された緩和 (*alleviation*) と呼ばれる手続きにより、ultralocal な Poisson 構造を持つようにこれらの模型を変形する手法が知られている。

4 次元 CS 理論の立場では、Poisson 括弧の ultralocality/non-ultralocality は order/disorder defect による処方の違いになることが示唆されている [28]。よって緩和の手続きは 4 次元 CS 理論では order/disorder defect の変換に対応しているはずである。4 次元 CS 理論の order defect を解析することは、より一般の non-ultralocality の緩和に応用できることが期待される。この節では [18] に従い、ultralocal な Poisson 構造を持つ Faddeev-Reshetikhin 模型 [52] を order defect から導出する方法を議論する。

6.1 Non-ultralocality の緩和と FR 模型

この節では、Faddeev-Reshetikhin (FR) 模型 [52] の手短なレビューを与える。詳しくは [64] を見よ。

6.1.1 古典作用

FR 模型の作用は次のように与えられる。

$$S_{\text{FR}}[g_{(\pm)}] = - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} - \frac{1}{2\nu} g_{(+)} \Lambda g_{(+)}^{-1} g_{(-)} \Lambda g_{(-)}^{-1} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^-. \quad (6.1.1)$$

ここで ν は実パラメータであり、 $g_{(\pm)}$ は $SU(2)$ の群要素である。前節までと同様に積分領域 \mathcal{M} は 2 次元 Minkowski 時空であり、座標 $x^\alpha = (x^0, x^1) = (\tau, \sigma)$ と計量 $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, +1)$ を持っている。 \mathcal{M} 上の光円錐座標 σ^\pm は (2.1.1) で与える。 Λ は $SU(2)$ の Cartan 生成子であり、今は

$$\Lambda = T^3 \quad (6.1.2)$$

と取る。Lie 代数 $\mathfrak{su}(2)$ の生成子は T^a ($a = 1, 2, 3$) と書き表し、次のような関係式を満たす。

$$T^a = -\frac{i}{2}\sigma^a, \quad [T^a, T^b] = \varepsilon^{abc}T^c, \quad \text{Tr}[T^a T^b] = -\frac{1}{2}\delta^{ab}. \quad (6.1.3)$$

σ^a は Pauli 行列であり、構造定数 ε^{abc} は $\varepsilon^{123} = 1$ と規格化された反対称テンソルである。この作用の表式 (6.1.1) は [64] で与えられたものと同じである。FR 模型は標的空間 $R \times S^3$ を持つシグマ模型と密接に関連しており、(6.1.1) の低エネルギー有効作用は Landau-Lifshitz 模型になることが知られている [89]。作用 (6.1.1) の構造群を [64] で行われているように $SU(N)$ に一般化するすることは容易であるが、ここでは簡単のため $SU(2)$ の場合に限って議論を進める。

作用 (6.1.1) に対し変分 $g_{(\pm)} \mapsto g_{(\pm)} + \delta g_{(\pm)}$ を取ると、

$$\begin{aligned} \delta S_{\text{FR}}[g_{(\pm)}] &= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(- \mathcal{J}_{(+)} \delta g_{(+)} g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} g_{(+)}^{-1} + \mathcal{J}_{(+)} \partial_- g_{(+)} g_{(+)}^{-1} \delta g_{(+)} g_{(+)}^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2\nu} \delta g_{(+)} g_{(+)}^{-1} \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{J}_{(-)} + \frac{1}{2\nu} \mathcal{J}_{(+)} \delta g_{(+)} g_{(+)}^{-1} \mathcal{J}_{(-)} + (+ \leftrightarrow -) \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\left\{ \left[\partial_- g_{(+)} g_{(+)}^{-1}, \mathcal{J}_{(+)} \right] + \frac{1}{2\nu} [\mathcal{J}_{(-)}, \mathcal{J}_{(+)}] \right\} \delta g_{(+)} g_{(+)}^{-1} + (+ \leftrightarrow -) \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\left\{ \partial_- \mathcal{J}_{(+)} - \frac{1}{2\nu} [\mathcal{J}_{(-)}, \mathcal{J}_{(+)}] \right\} \delta g_{(+)} g_{(+)}^{-1} + (+ \leftrightarrow -) \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \end{aligned} \quad (6.1.4)$$

となるため、運動方程式

$$\partial_{\mp} \mathcal{J}_{(\pm)} = \mp \frac{1}{2\nu} [\mathcal{J}_{(+)}, \mathcal{J}_{(-)}] \quad (6.1.5)$$

を得る。ただし、

$$\mathcal{J}_{(\pm)} := g_{(\pm)} \cdot \Lambda \cdot g_{(\pm)}^{-1} \quad (6.1.6)$$

である。上記の運動方程式 (6.1.5) は次のように書き換えることができる。

$$\partial_+ \mathcal{J}_{(-)} - \partial_- \mathcal{J}_{(+)} - \frac{1}{\nu} [\mathcal{J}_{(+)}, \mathcal{J}_{(-)}] = 0, \quad \partial_- \mathcal{J}_{(+)} + \partial_+ \mathcal{J}_{(-)} = 0. \quad (6.1.7)$$

従って、 $\mathcal{J}_{(\alpha)}$ ($\alpha = \pm$) は on-shell で保存するカレントとみなすことができる。(6.1.7) の第 2 式は主カイラル模型の運動方程式 (2.1.25) と同じ形を取っているが、 $\mathcal{J}_{(\pm)}$ は定義 (6.1.6) より off-shell で付加的な関係式 (拘束条件)

$$\text{Tr}[(\mathcal{J}_{(\pm)})^n] = \text{const.} \quad (6.1.8)$$

を満たすことがわかる。一方、 $SU(2)$ 主カイラル模型にはこのような関係式を満たす保存カレントは存在しない。^{1 2} また、(6.1.7) の第 1 式は FR 模型の場合 on-shell のみで成立する運動方程式であるが、主カイラル模型の場合は左不変カレントの off-shell 平坦性条件であることに注意されたい。

よく知られているように、FR 模型 (6.1.1) は古典的可積分である。実際、方程式 (6.1.7) は $SU(2)$ の運動方程式と同じ形をしており、容易に Lax pair

$$\mathcal{L}_{\pm}(z) = \mp \frac{1}{z \pm \nu} \mathcal{J}_{(\pm)} \quad (6.1.11)$$

を構成することができる。ここで $z \in \mathbb{C}P^1$ はスペクトラルパラメータである。Lax pair (6.1.11) の平坦性条件は運動方程式 (6.1.7) と同値であることは直ちに確かめられる。

$$\begin{aligned} \partial_+ \mathcal{L}_- - \partial_- \mathcal{L}_+ + [\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-] &= \frac{1}{z - \nu} \partial_+ \mathcal{J}_{(-)} + \frac{1}{z + \nu} \partial_- \mathcal{J}_{(+)} - \frac{1}{z^2 - \nu^2} [\mathcal{J}_{(+)}, \mathcal{J}_{(-)}] \\ &= \frac{\nu}{z^2 - \nu^2} \left(\partial_+ \mathcal{J}_{(-)} - \partial_- \mathcal{J}_{(+)} - \frac{1}{\nu} [\mathcal{J}_{(+)}, \mathcal{J}_{(-)}] \right) \\ &\quad + \frac{z}{z^2 - \nu^2} (\partial_+ \mathcal{J}_{(-)} + \partial_- \mathcal{J}_{(+)}) . \end{aligned} \quad (6.1.12)$$

Section 2.1.1 で述べた通り、Lax pair からモノドロミー行列

$$T(z) = \text{P exp} \left[- \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma \mathcal{L}_{\sigma}(\sigma; z) \right] \quad (6.1.13)$$

を構成することにより、無限個の (non-local な) 保存チャージを得ることができる。

¹この関係式 (6.1.8) は $SU(2)$ 主カイラル模型のエネルギー運動量テンソルが定数であるという条件

$$T_{\pm\pm} = \text{Tr}[\mathcal{J}_{(\pm)} \mathcal{J}_{(\pm)}] = -\frac{1}{2} \quad (6.1.9)$$

と見ることができる。この意味で FR 模型は $SU(2)$ 主カイラル模型に対する Pohlmeyer 簡約 [65–67, 90] のある種の実現になっているとも言える。

²主カイラル模型の場合には運動方程式から

$$\partial_{\mp} \text{Tr}[(\mathcal{J}_{(\pm)})^n] = 0 \quad (6.1.10)$$

のみが従う。例えば $n = 2$ の時、これは $\partial_- T_{++} = \partial_+ T_{--} = 0$ を意味している。

6.1.2 Poisson 構造

FR 模型の Poisson 構造は緩和により $SU(2)$ 主カイラル模型のものより単純になっている。実際、 $\mathcal{J}_{(\pm)}^a(\sigma)$ の Poisson 括弧は

$$\begin{aligned} \{\mathcal{J}_{(\pm)}^a(\sigma_1), \mathcal{J}_{(\pm)}^b(\sigma_2)\} &= \varepsilon^{abc} \mathcal{J}_{(\pm)}^c(\sigma_2) \delta(\sigma_1 - \sigma_2), \\ \{\mathcal{J}_{(+)}^a(\sigma_1), \mathcal{J}_{(-)}^b(\sigma_2)\} &= 0 \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

と与えられる。ここから見て取れるように、 $SU(2)$ 主カイラル模型の場合とは異なり (6.1.14) の右辺にはデルタ関数の微分を含む項は現れない。(6.1.14) の関係式を用いると、Lax pair の空間成分の Poisson 括弧は次のように表せる。

$$\{\mathcal{L}_\sigma(\sigma_1; z_1) \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2; z_2)\} = [r(z_1, z_2), \mathcal{L}_\sigma(\sigma_1; z_1) \otimes 1 + 1 \otimes \mathcal{L}_\sigma(\sigma_2; z_2)] \delta(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (6.1.15)$$

ここで Poisson 括弧のテンソル表示は (2.1.12) と同様に

$$\{A \otimes B\} := \{A \otimes 1, 1 \otimes B\} = \sum_{a=1}^3 \{A^a, B^a\} T^a \otimes T^a \quad (6.1.16)$$

と定義される。そして $r(z_1, z_2) \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ はこの系を特徴付ける古典 r -行列であり、具体的には次のように求められる。

$$r(z_1, z_2) = -\frac{\sum_{a=1}^3 T^a \otimes T^a}{z_1 - z_2} = -\frac{\varphi(z_1)^{-1} + \varphi(z_2)^{-1}}{2(z_1 - z_2)} \sum_{a=1}^3 T^a \otimes T^a \quad (6.1.17)$$

ここで登場した $\varphi(z)$ がツイスト関数であり、

$$\varphi(z) = 1 \quad (6.1.18)$$

である。古典 r -行列 (6.1.17) は確かに hCYBE(2.2.9) を満たす。(6.1.15) にはデルタ関数の微分項は現れず、緩和により non-ultralocality が解消されていることがわかる。

6.2 4次元 CS 理論による FR 模型の導出

この節では、2つの order defect を持つ 4次元 CS 理論から FR 模型を導出する。ここでの導出は disorder defect に対する [19] の手法の order defect への一般化である。

6.2.1 2つの order defect を持った 4次元 CS 理論

Lie 群 $SU(2)$ の複素化 $G^{\mathbb{C}} = SU(2)^{\mathbb{C}}$ 、及びそれに付随する Lie 代数 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}} = \mathfrak{su}(2)^{\mathbb{C}}$ を考える。³ 前節までと同様に、 $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値を取るゲージ場 A は $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ 上で定義されている。 $\mathbb{C}P^1 := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の大域

³Section 6.1 と同様にここでは $SU(2)$ の場合に限って議論を行う。一般の半単純 Lie 代数の場合も Cartan 生成子 Λ を適切に取ることにより全く同様の議論ができる。[64]

的正則座標は z で表すものとする。C の幾何は導出される可積分系が rational クラスで特徴付けられることを意味している。

出発点として、2つの order defect に結合した 4次元 CS 理論を考える。作用は

$$\begin{aligned} S[A, \mathcal{G}_{(\pm)}] &= S_{CS}[A] - \int_{\mathcal{M} \times \{z_+\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \mathcal{G}_{(+)}^{-1} D_- \mathcal{G}_{(+)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_-\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \mathcal{G}_{(-)}^{-1} D_+ \mathcal{G}_{(-)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

で与えられ、ここで共変微分 D_{\pm} は次のように定義される。

$$D_{\pm} \mathcal{G}_{(\mp)} := (\partial_{\pm} + \mathcal{A}_{\pm}) \mathcal{G}_{(\mp)}, \quad \mathcal{A}_+ := A_+|_{z_-}, \quad \mathcal{A}_- := A_-|_{z_+}. \quad (6.2.2)$$

作用 (6.2.1) の第 2、第 3 項は $z_{\pm} \in \mathbb{R}$ に位置する 2つの order defect を記述している。第 1 項目は (3.3.2) と同じ 4次元 CS 理論の作用

$$S_{CS}[A] = \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times CP^1} \omega \wedge CS(A) \quad (6.2.3)$$

であるが、特に括弧 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ としてこの節では Tr を用いる。つまり、

$$CS(A) := \text{Tr} \left[A \wedge \left(dA + \frac{2}{3} A \wedge A \right) \right] \quad (6.2.4)$$

である。ここで有理型 1 形式 ω はツイスト関数 (6.1.18) を用いて次のように定義される。

$$\omega := \varphi(z) dz = dz, \quad (6.2.5)$$

ツイスト関数 (6.1.18) は零点を持たないが、これが先に述べたように order defect の特徴である。上の $\varphi(z)$ は位数 2 の極を無限遠に持つことがわかる。

$$\mathfrak{p} = \{\infty\}. \quad (6.2.6)$$

運動方程式

作用 (6.2.1) の運動方程式を導出しよう。A に関して (6.2.1) の変分を取ると、

$$\begin{aligned} \delta S[A] &= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathcal{M} \times CP^1} \omega \wedge \text{Tr} (\delta A \wedge F(A)) + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times CP^1} d\omega \wedge \text{Tr} (\delta A \wedge A) \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times CP^1} \text{Tr} (\delta A_- \cdot \mathcal{G}_{(+)} \Lambda \mathcal{G}_{(+)}^{-1} \delta(z - z_+)) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \wedge dz \wedge d\bar{z} \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times CP^1} \text{Tr} (\delta A_+ \cdot \mathcal{G}_{(-)} \Lambda \mathcal{G}_{(-)}^{-1} \delta(z - z_-)) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \wedge dz \wedge d\bar{z} \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

を得る。 $F(A) := dA + A \wedge A$ はゲージ場 A の場の強さである。上の式を得る際に、 A が $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ の境界で 0 になることを仮定し、デルタ関数の関係式

$$\int_{\mathbb{C}P^1} \delta(z - z_{\pm}) dz \wedge d\bar{z} = 1 \quad (6.2.8)$$

を用いた。bulk EOM は従って次のように得られる。

$$F_{+-} = 0, \quad (6.2.9)$$

$$\omega F_{\bar{z}+} = -2\pi i \mathcal{G}_{(+)} \cdot \Lambda \cdot \mathcal{G}_{(+)}^{-1} \delta(z - z_+) dz, \quad (6.2.10)$$

$$\omega F_{\bar{z}-} = 2\pi i \mathcal{G}_{(-)} \cdot \Lambda \cdot \mathcal{G}_{(-)}^{-1} \delta(z - z_-) dz. \quad (6.2.11)$$

2つ目と3つ目の方程式は A が $z = z_{\pm}$ において極を持つことを意味している。後の議論では、order defect の位置の集合を \mathfrak{z} で表す。

$$\mathfrak{z} = \{z_{\pm}\}. \quad (6.2.12)$$

前節までの disorder defect の議論では \mathfrak{z} は ω の零点の集合であったが、この節では定義が異なることに注意せよ。ただし、どちらの場合でも \mathfrak{z} は Lax 形式の極の位置になることがわかる。boundary EOM は (3.3.13) と同様にして次の形で書き下すことができる。

$$\begin{aligned} & (\text{res}_{\infty} \omega) \epsilon^{\alpha\beta} \text{Tr} (A_{\alpha}|_{\infty} \delta A_{\beta}|_{\infty}) + (\text{res}_{\infty} \xi_{\infty} \omega) \epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\xi_{\infty}} \text{Tr} (A_{\alpha} \delta A_{\beta})|_{\infty} \\ & = -2\epsilon^{\alpha\beta} \partial_{\xi_{\infty}} \text{Tr} (A_{\alpha} \delta A_{\beta})|_{\infty} = 0. \end{aligned} \quad (6.2.13)$$

ここで $\xi_{\infty} := 1/z$ は $z = \infty$ の周りでの局所座標である。

ゲージ不変性

作用 (6.2.3) のゲージ不変性をみよう。今の場合 order defect に付随した新たな自由度 $\mathcal{G}_{(\pm)}$ が存在するため、disorder defect の場合をわずかに修正した形になっている。

disorder defect の場合 [19] の場合のアナロジーで、次の変換

$$A \mapsto A^u := u \cdot A \cdot u^{-1} - duu^{-1}, \quad \mathcal{G}_{(\pm)} \mapsto \mathcal{G}_{(\pm)}^u := u|_{z_{\pm}} \cdot \mathcal{G}_{(\pm)} \quad (6.2.14)$$

を考える。ここで u は $G^{\mathbb{C}}$ に値を取る $\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1$ 上の関数である。通常通り、off-shell レベルでは作用 (6.2.1) は変換 (6.2.14) のもとで

$$S[A^u] = S[A] + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge I_{WZ}[u] + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge d(\text{Tr}(u^{-1} du \wedge A)), \quad (6.2.15)$$

と変換する。Wess-Zumino (WZ) 3 形式 $I_{WZ}[u]$ は次のように定義されている。

$$I_{WZ}[u] := \frac{1}{3} \text{Tr}(u^{-1} du \wedge u^{-1} du \wedge u^{-1} du). \quad (6.2.16)$$

よって作用 (6.2.1) は

$$\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge I_{WZ}[u] = 0, \quad u|_{\mathbb{p}} = 1. \quad (6.2.17)$$

を満たすゲージパラメータ u を用いた変換 (6.2.14) のもとで不変であり、この変換をゲージ変換と呼ぶ。これらの条件は disorder defect の時と同一である。「形式的なゲージ変換」も一般の u に対する変換 (6.2.14) として定義される。

6.2.2 Lax 形式

次に作用 (6.2.1) に付随した Lax 形式を導入する。

disorder defect のときと同様に、Lax 形式は形式的なゲージ変換⁴ (6.2.14) を実行することにより、

$$A = -d\hat{g}\hat{g}^{-1} + \hat{g} \cdot \mathcal{L} \cdot \hat{g}^{-1}, \quad \mathcal{G}_{(\pm)} = \hat{g}_{(\pm)} \cdot g_{(\pm)}, \quad (6.2.18)$$

と定義される。ここで $\hat{g}, g_{(\pm)} \in G^{\mathbb{C}}$ 及び $\hat{g}_{(\pm)} := \hat{g}|_{z_{\pm}}$ である。 $\mathcal{L}_{\bar{z}} = 0$ というゲージを選択することにより、1 形式 \mathcal{L} は

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\tau} d\tau + \mathcal{L}_{\sigma} d\sigma = \mathcal{L}_{+} d\sigma^{+} + \mathcal{L}_{-} d\sigma^{-} \quad (6.2.19)$$

という形になる。(6.2.19) を (6.2.10), (6.2.11) に代入することにより、bulk EOM は次のようになる。

$$\partial_{+}\mathcal{L}_{-} - \partial_{-}\mathcal{L}_{+} + [\mathcal{L}_{+}, \mathcal{L}_{-}] = 0, \quad (6.2.20)$$

$$\omega \partial_{\bar{z}}\mathcal{L}_{+} = -2\pi i \mathcal{J}_{(+)} \delta(z - z_{+}) dz, \quad (6.2.21)$$

$$\omega \partial_{\bar{z}}\mathcal{L}_{-} = 2\pi i \mathcal{J}_{(-)} \delta(z - z_{-}) dz. \quad (6.2.22)$$

カレント $\mathcal{J}_{(\pm)}$ は

$$\mathcal{J}_{(\pm)} := g_{(\pm)} \cdot \Lambda \cdot g_{(\pm)}^{-1} \quad (6.2.23)$$

と定義される。後で見ると、これらは FR 模型のカレント (6.1.6) と同定することができる。boundary EOM (6.2.21) と (6.2.22) は Lax 形式が $z = z_{\pm}$ に極を持ち $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ に値を取る有理型 1 形式であることを示している。

⁴ 「形式的」という用語の使い方には関しては Section 3.3 をみよ。

(6.2.18) を (6.2.1) に代入すると、4次元の作用 (6.2.1) は次のように書き直せる。

$$\begin{aligned}
S[A] &= \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge (\text{Tr}(\mathcal{L} \wedge d\mathcal{L}) + d(\text{Tr}(\hat{g}^{-1} d\hat{g} \wedge \mathcal{L})) + I_{WZ}[\hat{g}]) \\
&\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_+\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot g_{(+)}^{-1} (\partial_- + \mathcal{L}_-|_{z_+}) g_{(+)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\
&\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_-\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot g_{(-)}^{-1} (\partial_+ + \mathcal{L}_+|_{z_-}) g_{(-)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^-. \tag{6.2.24}
\end{aligned}$$

表式 (6.2.24) は未だ 4次元の作用であることに注意せよ。次の節では \hat{g} に適切な条件を課すことにより、この 4次元の作用を対応する 2次元の作用に次元簡約することを考える。

6.2.3 Archipelago 条件による 4次元から 2次元への簡約

2次元の可積分模型の作用を得るためには、disorder defect の場合と同様に archipelago 条件を課せば十分である。この時 4次元の作用 (6.2.1) は次のように簡潔な形に表せる。

$$\begin{aligned}
S[g_{(\pm)}] &= -\frac{1}{4} \sum_{x \in \mathfrak{p}} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr}(\text{res}_x(\varphi \mathcal{L}) \wedge \hat{g}_x^{-1} d\hat{g}_x) - \frac{1}{4} \sum_{x \in \mathfrak{p}} \int_{\mathcal{M} \times [0, R_x]} (\text{res}_x \omega) \wedge I_{WZ}[\hat{g}_x] \\
&\quad + \frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge \text{Tr}(\mathcal{L} \wedge d\mathcal{L}) \\
&\quad - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{L}_-|_{z_+} + \mathcal{J}_{(-)} \mathcal{L}_+|_{z_-} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^-, \\
&= +\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge \text{Tr}(\mathcal{L} \wedge d\mathcal{L}) \\
&\quad - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{L}_-|_{z_+} + \mathcal{J}_{(-)} \mathcal{L}_+|_{z_-} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^-. \tag{6.2.25}
\end{aligned}$$

2つ目の等号において、関係式

$$\text{res}_\infty(\varphi \mathcal{L}) = 0, \quad \text{res}_\infty \omega = 0 \tag{6.2.26}$$

を用いた。disorder defect の場合は Lax 形式の極と ω の零点が一致していたため (6.2.25) の第 1 項は寄与しなかったことに注意せよ。(6.2.25) の第 1 項は一見 4形式に見えるが、実際は (6.2.37) で見るようにこれは $\mathcal{M} \times \{z_\pm\}$ に存在する defect に局在する項である。なぜなら、 $d\mathcal{L}$ は bulk EOM (6.2.21), (6.2.22) より order defect を台に持つデルタ関数の z 依存性を持つからである。

実性条件

4次元の作用 (6.2.1) が実になるための十分条件を議論しよう。複素共役 $z \mapsto \bar{z}$ によって定義される対合 $\mu_t : \mathbb{C}P^1 \rightarrow \mathbb{C}P^1$ を導入する。 $\tau : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は反線形な対合かつ自己同型写像であり、 τ の下で

の固定点の集合が $\mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ の実 Lie 代数 \mathfrak{g} である。自己同型写像 τ は次の関係式を満たす。

$$\overline{\text{Tr}(B \wedge C)} = \text{Tr}(\tau B \wedge \tau C), \quad \forall B, C \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}. \quad (6.2.27)$$

また、 τ に誘導される Lie 群 $G^{\mathbb{C}}$ に対する作用は $\tilde{\tau}: G^{\mathbb{C}} \rightarrow G^{\mathbb{C}}$ と書き示す。

実性条件は上記の複数の対合を用いて次のように書ける。

$$\bar{\omega} = \mu_t^* \omega, \quad \tau A = \mu_t^* A, \quad \tilde{\tau} \mathcal{G}_{(\pm)} = \mu_t^* \mathcal{G}_{(\pm)} \quad (6.2.28)$$

作用は (6.2.1) は実際に条件 (6.2.28) のもとで不変であることが以下のように確かめられる。

$$\begin{aligned} \overline{S[A, \mathcal{G}_{(\pm)}]} &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \bar{\omega} \wedge CS(\tau A) \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_+\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \tilde{\tau} \mathcal{G}_{(+)}^{-1} (\partial_- + \tau A_-|_{z_+}) \tilde{\tau} \mathcal{G}_{(+)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_-\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \tilde{\tau} \mathcal{G}_{(-)}^{-1} (\partial_+ + \tau A_+|_{z_-}) \tilde{\tau} \mathcal{G}_{(-)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \mu_t^* \omega \wedge CS(\mu_t^* A) \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_+\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \mu_t^* \mathcal{G}_{(+)}^{-1} (\partial_- + \mu_t^* A_-|_{z_+}) \mu_t^* \mathcal{G}_{(+)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \{z_-\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \mu_t^* \mathcal{G}_{(-)}^{-1} (\partial_+ + \mu_t^* A_+|_{z_-}) \mu_t^* \mathcal{G}_{(-)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &= -\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mu_t \mathbb{C}P^1} \omega \wedge CS(A) \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \mu_t \{z_+\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \mathcal{G}_{(+)}^{-1} (\partial_- + A_-|_{z_+}) \mathcal{G}_{(+)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &\quad - \int_{\mathcal{M} \times \mu_t \{z_-\}} \text{Tr} \left(\Lambda \cdot \mathcal{G}_{(-)}^{-1} (\partial_+ + A_+|_{z_-}) \mathcal{G}_{(-)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\ &= S[A, \mathcal{G}_{(\pm)}]. \end{aligned} \quad (6.2.29)$$

ここで、定義より $\mu_t(z_{\pm}) = z_{\pm}$ かつ $\Lambda \in \mathfrak{g}$ であることを利用した。関係式 (6.2.18) より、実性条件は Lax 形式の言葉で

$$\tilde{\tau} \hat{g}_{(\pm)} = \mu_t^* \hat{g}_{(\pm)}, \quad \tilde{\tau} g_{(\pm)} = \mu_t^* g_{(\pm)}, \quad \tau \mathcal{L} = \mu_t^* \mathcal{L} \quad (6.2.30)$$

とも表せる。

2次元ゲージ変換

2次元の作用 (6.2.25) は「2次元ゲージ対称性」を持つ。つまり、 A と $\mathcal{G}_{(\pm)}$ を不変に保ったまま、 \hat{g} に課された archipelago 条件も維持しつつ、あるゲージ変換を実行することができる。この変換のも

とで \mathcal{L} , $\hat{g}_{(\pm)}$, $g_{(\pm)}$ は次のように変換する。

$$\mathcal{L} \mapsto h^{-1}dh + h^{-1} \cdot \mathcal{L} \cdot h, \quad \hat{g}_{(\pm)} \mapsto \hat{g}_{(\pm)} \cdot h, \quad g_{(\pm)} \mapsto h^{-1} \cdot g_{(\pm)}. \quad (6.2.31)$$

ここで h は \mathfrak{g} に値を取る $(\tau, \sigma) \in \mathcal{M}$ 上の滑らかな関数である。4次元のゲージ対称性 (6.2.14) とは対照的に、2次元ゲージ対称性 (6.2.31) は A と $\mathcal{G}_{(\pm)}$ を変更せずに \hat{g} を定義し直す冗長性とみなすことができる。

2次元有効作用

Lax 形式を明示的に求めることにより、(6.2.25) を具体的に評価しよう。

最初にすべきことは boundary EOM (6.2.13) を次の条件

$$A|_{\infty} = 0 \quad (6.2.32)$$

の下で解くことである。これは boundary EOM の自明な解 (Dirichlet 境界条件) である。

Section 6.2.2 で見たように、 \mathcal{L}_{\pm} はそれぞれ $z = z_{\pm}$ に極を持つ。従って、Lax 形式 \mathcal{L}_{\pm} に対する次の仮設を置くことが自然である。

$$\mathcal{L} = \left(U_+ - \frac{\mathcal{J}_{(+)}}{z - z_+} \right) d\sigma^+ + \left(U_- + \frac{\mathcal{J}_{(-)}}{z - z_-} \right) d\sigma^-. \quad (6.2.33)$$

なぜなら、 z の 1 位の極は公式

$$\delta(z - z_{\pm}) = \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{z - z_{\pm}} \right) \quad (6.2.34)$$

によりデルタ関数を作るからである。ここで U_{\pm} は \mathcal{M} 上の未定関数であり、さらに実性条件 (6.2.30) を考慮すると \mathfrak{g} に値を取ることがわかる。2次元ゲージ対称性 (6.2.31) を用いると、archipelago 条件を満たす場 \hat{g} を

$$\hat{g}|_{\infty} = 1 \quad (6.2.35)$$

のようにとれる。境界条件 (6.2.32) は $U_{\pm} = 0$ を意味するため、Lax 形式は

$$\mathcal{L} = -\frac{\mathcal{J}_{(+)}}{z - z_+} d\sigma^+ + \frac{\mathcal{J}_{(-)}}{z - z_-} d\sigma^- \quad (6.2.36)$$

となる。

最後に、求めた Lax 形式を用いて作用 (6.2.25) を評価しよう。(6.2.36) の表式を用いると、(6.2.25) の第 1 項は

$$-\frac{i}{4\pi} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \omega \wedge \text{Tr}(\mathcal{L} \wedge d\mathcal{L})$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M} \times \mathbb{C}P^1} \text{Tr} [\mathcal{L}_+ (\mathcal{J}_{(-)} \delta(z - z_-))] dz \wedge d\sigma^+ \wedge d\bar{z} \wedge d\sigma^- \\
&\quad + \text{Tr} [\mathcal{L}_- (-\mathcal{J}_{(+)} \delta(z - z_+))] dz \wedge d\sigma^- \wedge d\bar{z} \wedge d\sigma^+ \\
&= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} (\mathcal{J}_{(-)} \mathcal{L}_+|_{z_-} + \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{L}_-|_{z_+}) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \tag{6.2.37}
\end{aligned}$$

と書き直せる。結果的に 2 次元の作用として以下の形を得る。

$$\begin{aligned}
&S_{2D}[g_{(\pm)}] \\
&= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{L}_-|_{z_+} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{(-)} \mathcal{L}_+|_{z_-} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\
&= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \frac{1}{(z_+ - z_-)} \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{J}_{(-)} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^-. \tag{6.2.38}
\end{aligned}$$

上記の表式 (6.2.36) と (6.2.38) は、 $z_+ = -\nu$, $z_- = \nu$ と取った時に確かに (6.1.11) と (6.1.1) に一致する。

6.3 FR 模型の trigonometric 変形

この節では FR 模型の trigonometric 変形を導出する。

6.3.1 ツイスト関数

前節までの rational 処方 を trigonometric 処方へ と変形するため、 r -行列 (6.1.17) を $\mathfrak{su}(2)$ の trigonometric r -行列に置き換える。⁵

$$r_{\text{trig.}}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{i\eta T^+ \otimes T^-}{1 - e^{i\eta(\lambda_1 - \lambda_2)}} - \frac{i\eta T^- \otimes T^+}{1 - e^{-i\eta(\lambda_1 - \lambda_2)}} - \frac{\eta}{2} \cot\left(\frac{\eta(\lambda_1 - \lambda_2)}{2}\right) T^3 \otimes T^3. \tag{6.3.1}$$

ここで変形パラメータ $\eta \in \mathbb{R}$ を導入し、生成子の光円錐表示は (4.4.16) のように取った。この古典 r -行列 (6.3.1) は hCYBE(2.2.9) を満たす。また、(6.3.1) は trigonometric 型の r -行列であるため、スペクトラルパラメータ λ は (\mathbb{C} ではなく) 円柱に値を取る。 λ の基本領域は次のように定める。

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2\eta} < \text{Re } \lambda < \frac{3\pi}{2\eta} \right\}. \tag{6.3.2}$$

極限 $\eta \rightarrow 0$ を取ることにより、古典 r -行列 (6.3.1) は rational 型 (6.1.17) に還元することがわかる。 r -行列 (6.3.1) はスペクトラルパラメータと成分に対して歪対称であることが確かめられる。

$$r_{\text{trig.ab}}(\lambda_1, \lambda_2) = -r_{\text{trig.ba}}(\lambda_2, \lambda_1). \tag{6.3.3}$$

⁵ $\mathfrak{sl}(2)$ の場合のこの変形は [6, 8] で見られる。

r -行列の成分は次のように定義される。

$$r_{\text{trig.}}(\lambda_1, \lambda_2) := r_{\text{trig.,ab}}(\lambda_1, \lambda_2) T^a \otimes T^b. \quad (6.3.4)$$

この歪対称性は (2.1.19) と同じ意味であるが、添字の定義に注意せよ。古典 r -行列を与えられた時、それに付随するツイスト関数はその非対称性を測るため、 $(1, 0)$ -形式 ω は

$$\omega = \varphi_{\text{trig.}\lambda}(\lambda) d\lambda = d\lambda \quad (6.3.5)$$

となる。

ω の実性条件

対合 μ_t は trigonometric 処方の際は次のように定義される。

$$\mu_t : \lambda \rightarrow \bar{\lambda} \iff z \rightarrow \frac{1}{\bar{z}}. \quad (6.3.6)$$

この μ_t の定義は主カイラル模型の trigonometric 変形 (η 変形) の時の定義 (4.1.9) と対応している。 λ 座標を用いると、実性条件 (6.2.28) は自明に満たされることがわかる。

$$\bar{\omega} = d\bar{\lambda} = \mu_t \omega. \quad (6.3.7)$$

Costello-Yamazaki による表示との関係

有理型 1 形式 (6.3.5) が [8] の表式と整合的であることを確認することはためになるだろう。

まずは円柱 \mathbb{C}/\mathbb{Z} から平面 $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ へと写像

$$z = e^{i\eta\lambda} \quad (6.3.8)$$

を用いて移ろう。 z 座標系では trigonometric r -行列 (6.3.1) は次のように表される。

$$r_{\text{trig.}}(z_1, z_2) = \frac{i\eta}{1 - z_1/z_2} T^+ \otimes T^- - \frac{i\eta}{1 - z_2/z_1} T^- \otimes T^+ - \frac{i\eta}{2} \frac{z_1 + z_2}{z_1 - z_2} T^3 \otimes T^3. \quad (6.3.9)$$

この r -行列は rational r -行列 (6.1.17) と

$$r_{\text{trig.}}(z_1, z_2) := \frac{\varphi_{\text{trig.}}^{-1}(z_1) + \varphi_{\text{trig.}}^{-1}(z_2)}{2} r(z_1, z_2) \quad (6.3.10)$$

と関係付いている。また、 \mathbb{C}^\times 上の $(1, 0)$ -形式 ω は次の形を取る。

$$\omega = \varphi_{\text{trig.}}(z) dz = \frac{dz}{i\eta z}. \quad (6.3.11)$$

ω は 2 つの単純極

$$\mathfrak{p} = \{0, \infty\} \quad (6.3.12)$$

を持つ。上記の ω の形 (6.3.11) は [8] の表式と確かに一致している。

6.3.2 境界条件

以下では、(1, 0)-形式 (6.3.11) を用いた 4 次元 CS 作用 (6.2.1) を考える。A の変分を取ることによ
り bulk EOM (6.2.9), (6.2.10), (6.2.11) を得るが、今 ω は (6.3.11) のものに置き換わっていることに
注意せよ。この節において、対合 μ_t は (6.3.6) で定義されているため、order defect の座標 $z = z_{\pm}$ は
 $z_{\pm} = 1/\bar{z}_{\pm}$ を満たしているものとする。

(1, 0)-形式 ω は 2 つの極 (6.3.12) を持つ。よって boundary EOM は以下のようになる。

$$\begin{aligned} & (\text{res}_0 \omega) \epsilon^{\alpha\beta} \text{Tr} (A_{\alpha}|_0 \delta A_{\beta}|_0) + (\text{res}_{\infty} \omega) \epsilon^{\alpha\beta} \text{Tr} (A_{\alpha}|\infty \delta A_{\beta}|\infty) \\ & = \epsilon^{\alpha\beta} \langle\langle (A_{\alpha}|_0, A_{\alpha}|\infty), \delta (A_{\beta}|_0, A_{\beta}|\infty) \rangle\rangle = 0. \end{aligned} \quad (6.3.13)$$

ここでの双線形形式は

$$\langle\langle (x, x'), (y, y') \rangle\rangle := \frac{1}{i\eta} (\text{Tr} (x \cdot x') - \text{Tr} (y \cdot y')) \quad (6.3.14)$$

と定義される。Appendix A で示すように、boundary EOM (6.3.13) は以下の Drinfel'd double を双
線形形式に対して割り当てることで解くことができる。

$$\mathfrak{h} := \mathfrak{g}^{\delta} \oplus \mathfrak{g}_R. \quad (6.3.15)$$

\mathfrak{g}^{δ} と \mathfrak{g}_R は

$$\mathfrak{g}_R := \{((R - i)x, (R + i)x) | x \in \mathfrak{g}\}, \quad (6.3.16)$$

$$\mathfrak{g}^{\delta} := \{(x, x) | x \in \mathfrak{g}\} \quad (6.3.17)$$

と定義されている。ここで、 $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は (2.2.25) において $c = i$ とおいた

$$[R(x), R(y)] - R([R(x), y] + [x, R(y)]) = [x, y] \quad (x, y \in \mathfrak{g}, R \in \text{End } \mathfrak{g}) \quad (6.3.18)$$

を満たす歪対称 R -作用素である。 R -作用素の歪対称性は今

$$\text{Tr} (R(x)y) = -\text{Tr} (xR(y)), \quad \forall x, y \in \mathfrak{g} \quad (6.3.19)$$

と表される。具体的な (6.3.18) の解として、Drinfel'd-Jimbo 型 (4.4.17) を与えることができる。

上記の Drinfel'd double を導入することにより、 A_{α} に対し

$$(A_{\alpha}|_0, A_{\alpha}|\infty) \in \mathfrak{g}_R \quad (6.3.20)$$

を境界条件として課することができる。

6.3.3 Lax 形式と 2 次元作用

前節で導入した境界条件のもとで、Lax 形式及び対応する 2 次元の作用を導出しよう。

rational 処方の場合と同様に、付随する Lax 形式が運動方程式 (6.2.20), (6.2.21), (6.2.22) (において ω を (6.3.11) のものに取り替えたもの) を満たすことが容易に確かめられる。従って、 \mathcal{L}_\pm の仮設

$$\mathcal{L} = \left(U_+ - \frac{i\eta z \mathcal{J}_{(+)}}{z - z_+} \right) d\sigma^+ + \left(U_- + \frac{i\eta z \mathcal{J}_{(-)}}{z - z_-} \right) d\sigma^- \quad (6.3.21)$$

を考えるのが自然である。ここで $U_\pm : \mathcal{M} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は滑らかな関数である。実性条件は再び (6.2.30) のように実現される。

U_\pm の表式を得るために、境界条件 (6.3.20) を用いる。すると、 A_\pm に対する拘束は

$$(R - i)A_\pm|_0 = (R + i)A_\pm|_\infty \quad (6.3.22)$$

と与えられる。Drinfel'd double の選択 (6.3.15) に付随する自由度を用いると $\hat{g}|_{z=0} \in G$ と取れるため、2 次元ゲージ不変性 $g \rightarrow g \cdot h$ ($h \in G$) を援用して $\hat{g}|_{z=0} = 1$ と固定する。さらに、実性条件 $\tilde{\tau}\hat{g} = \mu_t^* \hat{g}$ は $\tilde{\tau}(\hat{g}|_{z=0}) = \mu_t^*(\hat{g}|_{z=0}) = \hat{g}|_{z=\infty}$ を示している。以上より、各極での \hat{g} の値を

$$\hat{g}|_{z=0} = \hat{g}|_{z=\infty} = 1 \quad (6.3.23)$$

と定めることができる。よって、拘束 (6.3.22) は以下のような形になる。

$$(R - i)U_+ = (R + i)(U_+ - i\eta\mathcal{J}_{(+)}), \quad (R - i)U_- = (R + i)(U_- + i\eta\mathcal{J}_{(-)}). \quad (6.3.24)$$

この方程式を解くことにより、 U_\pm の表式

$$U_\pm = \pm \frac{\eta}{2}(R + i)\mathcal{J}_{(\pm)} \quad (6.3.25)$$

を得る。これを (6.3.21) に代入すると、Lax 形式は

$$\mathcal{L} = \left(\frac{\eta}{2}(R + i) - \frac{i\eta z}{z - z_+} \right) \mathcal{J}_{(+)} d\sigma^+ + \left(-\frac{\eta}{2}(R + i) + \frac{i\eta z}{z - z_-} \right) \mathcal{J}_{(-)} d\sigma^- \quad (6.3.26)$$

と与えられる。 U_\pm 単体は実 Lie 代数 \mathfrak{g} の元になっていないが、Lax 形式 (6.3.26) は確かに実性条件 (6.2.30) を満たすことが次のように確かめられる。

$$\begin{aligned} \tau\mathcal{L} &= \left(\frac{\eta}{2}(R - i) - \frac{-i\eta \bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_+} \right) \tau\mathcal{J}_{(+)} d\sigma^+ + \left(-\frac{\eta}{2}(R - i) + \frac{-i\eta \bar{z}}{\bar{z} - \bar{z}_-} \right) \tau\mathcal{J}_{(-)} d\sigma^- \\ &= \left(\frac{\eta}{2}(R - i) - \frac{-i\eta \bar{z}}{\bar{z} - z_+^{-1}} \right) \mathcal{J}_{(+)} d\sigma^+ + \left(-\frac{\eta}{2}(R - i) + \frac{-i\eta \bar{z}}{\bar{z} - z_-^{-1}} \right) \mathcal{J}_{(-)} d\sigma^- \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \mu_t^* \left[\left(\frac{\eta}{2}(R-i) - \frac{-i\eta z^{-1}}{z^{-1} - z_+^{-1}} \right) \mathcal{J}_{(+)} d\sigma^+ + \left(-\frac{\eta}{2}(R-i) + \frac{-i\eta z^{-1}}{z^{-1} - z_-^{-1}} \right) \mathcal{J}_{(-)} d\sigma^- \right] \\
&= \mu_t^* \left[\left(\frac{\eta}{2}(R+i) - \frac{i\eta z}{z - z_+} \right) \mathcal{J}_{(+)} d\sigma^+ + \left(-\frac{\eta}{2}(R+i) + \frac{i\eta z}{z - z_-} \right) \mathcal{J}_{(-)} d\sigma^- \right] \\
&= \mu_t^* \mathcal{L}.
\end{aligned} \tag{6.3.27}$$

ここで $\mathcal{J}_{(\pm)}$ が実 Lie 代数 \mathfrak{g} に値を取るという事実と、defect の座標 $z_{\pm} \in \mathbb{C}^{\times}$ が $z_{\pm} = 1/\bar{z}_{\pm}$ を満たすということを用いた。興味深いことに、Lax 形式 (6.3.26) は r -行列 (6.3.9) を用いて書き表すことができる。これを見るためにカレント $\mathcal{J}_{(\pm)}$ を次のように成分表示する。

$$\mathcal{J}_{(\pm)} = \mathcal{J}_{(\pm)}^- T^+ + \mathcal{J}_{(\pm)}^+ T^- + \mathcal{J}_{(\pm)}^3 T^3 \tag{6.3.28}$$

Lax 形式 (6.3.26) はこの時、

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \left(-\frac{i\eta z_+}{z - z_+} \mathcal{J}_{(+)}^- T^+ - \frac{i\eta z}{z - z_+} \mathcal{J}_{(+)}^+ T^- + \frac{i\eta}{2} \frac{z + z_+}{z - z_+} \mathcal{J}_{(+)}^3 T^3 \right) d\sigma^+ \\
&\quad + \left(\frac{i\eta z_-}{z - z_-} \mathcal{J}_{(-)}^- T^+ + \frac{i\eta z}{z - z_-} \mathcal{J}_{(-)}^+ T^- - \frac{i\eta}{2} \frac{z + z_-}{z - z_-} \mathcal{J}_{(-)}^3 T^3 \right) d\sigma^- \\
&= \left(\sum_{a=\pm,3} r_{\text{trig},ab}(z, z_+) \mathcal{J}_{(+)}^b T^a \right) d\sigma^+ + \left(- \sum_{a=\pm,3} r_{\text{trig},ab}(z, z_-) \mathcal{J}_{(-)}^b T^a \right) d\sigma^-
\end{aligned} \tag{6.3.29}$$

と書き直せる。この表式 (6.3.29) は [8] において提示された形と類似のものである。

最後に Lax pair (6.3.26) を持つ 2次元の作用を導出しよう。変形前と同様に、公式 (6.2.37) を用いる。ただし、(6.2.37) における $\mathbb{C}P^1$ は \mathbb{C}^{\times} に置き換える。実際に公式を適用すると、結果的に 2次元の作用は以下のように導出される。

$$\begin{aligned}
&S_{2D}[g_{(\pm)}] \\
&= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{L}_- \Big|_{z_+} + \frac{1}{2} \mathcal{J}_{(-)} \mathcal{L}_+ \Big|_{z_-} \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\
&= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \frac{i\eta}{2} \frac{z_+ + z_-}{z_+ - z_-} \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{J}_{(-)} - \frac{\eta}{2} \mathcal{J}_{(+)} R(\mathcal{J}_{(-)}) \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \\
&= - \int_{\mathcal{M}} \text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} + \frac{\eta \mathcal{J}_{(+)} \mathcal{J}_{(-)}}{2 \tan \left(\frac{\eta(\lambda_+ - \lambda_-)}{2} \right)} - \frac{\eta}{2} \mathcal{J}_{(+)} R(\mathcal{J}_{(-)}) \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^-.
\end{aligned} \tag{6.3.30}$$

最終行において、order defect の座標 $z_{\pm} \in \mathbb{C}^{\times}$ を

$$z_{\pm} = \exp(i\eta \lambda_{\pm}), \quad \lambda_{\pm} \in \mathbb{R} \tag{6.3.31}$$

とパラメトライズしている。変形された作用 (6.3.30) は trigonometric r -行列の言葉で

$$S_{2D}[g_{(\pm)}] = - \int_{\mathcal{M}} \left(\text{Tr} \left(\Lambda g_{(+)}^{-1} \partial_- g_{(+)} + \Lambda g_{(-)}^{-1} \partial_+ g_{(-)} \right) + r_{\text{trig.}, ab}(\lambda_+, \lambda_-) \mathcal{J}_{(-)}^a \mathcal{J}_{(+)}^b \right) d\sigma^+ \wedge d\sigma^- \quad (6.3.32)$$

と表すこともできる。極限 $\eta \rightarrow 0$ を取ることで、2次元の作用 (6.3.30) は変形前の作用 (6.2.38) に戻ることに注目せよ。

Chapter 7

結論・今後の展望

本論文では4次元CS理論が如何にして種々の可積分な場の理論を包含しているかを議論した。4次元CS理論の著しい点は、4次元空間 $\mathcal{M} \times C$ 上で定義された1つの理論に対し、Riemann面 C のトポロジーとツイスト関数、表面欠陥上での境界条件を指定するだけで多くの可積分模型が導出される点である。この際 Chern-Simons 理論が on-shell で平坦であると性質が、Lax pair の平坦性条件へと導く。この節では本論文で述べたことを総括し、今後の展望を述べる。

Chapter 2では、Lax pair を用いて可積分系を記述する方法について述べた。on-shell で平坦性条件を満たす Lax pair を構成することにより、モノドロミー行列を定義することができる。モノドロミー行列の Poisson 括弧を量子化することにより代数的 Bethe 仮説などの強力な解析手法を援用できるが、non-ultralocal な系に対しては Poisson 括弧の不定性からこれらが適用できないという問題がある。また、主カイラル模型と対称コセットシグマ模型に対する YB 変形を導入した。これは R -作用素を用いて作用と Lax pair を変形する手法である。Chapter 3において4次元CS理論の基本的なアイデアを述べ、具体例として主カイラル模型に対する YB 変形が実際に導出される手順をレビューした。4次元CS理論に含まれる表面欠陥として order defect と disorder defect が考えられる。order defect が2次元面内に新たな物理的自由度を導入するのに対し、disorder defect は有理型1形式 ω の極上にゲージ場の自由度が局在するというものである。特に disorder defect においては極の位数によって異なる boundary EOM が導出され、それに対し境界条件を指定することで可積分変形が得られた。

Chapter 4において、trigonometric 処方に基づいた YB 変形を4次元CS理論から導出した。rational 処方に対しては $C = \mathbb{C}$ だったのに対し、trigonometric 処方では $C = \mathbb{C}^\times$ と円柱のトポロジーを持っている。それに伴って極からは rational の時の倍の自由度が現れ、これを適切な \mathbb{Z}_2 -grading 自己同型写像 Σ を用いて結ぶつけることによって YB 変形が導出された。 $SU(n)$ 主カイラル模型に対して、 $n \geq 3$ の時には元の YB 変形とは異なる新しいタイプの YB 変形になる。Chapter 5は $\mathbb{Z}_2/\mathbb{Z}_4$ -grading を持つコセットの構造がどのようにして現れるかを議論し、その homogeneous YB 変形を導く境界条

件を同定した。AdS₅ × S⁵ 超弦理論のツイスト関数からは4倍の自由度が disorder defect 上に現れ、これらを \mathbb{Z}_4 -grading 自己同型写像で結びつけることにより supercoset の構造が導かれた。Chapter 6 では order defect の側面を詳細に扱い、FR 模型を導出した。FR 模型は $SU(2)$ 主カイラル模型の位相空間を制限したものに对应し、Poisson 構造が緩和された模型である。さらに disorder defect に対する境界条件の取り方を応用することにより、FR 模型の trigonometric 変形が存在することを示した。

今後の展望として第一に、Chapter 4 で導かれた新しいタイプの YB 変形の AdS₅ × S⁵ 超弦理論に対する拡張が挙げられる。この変形は Lie 代数によらない形で定義されているため、supercoset に対しても応用できると考えられる。新たに導入された自己同型写像 Σ によって B 場だけでなく R-R 場やディラトンとの結合が異なることが予想される。あるいは新型 YB 変形の Poisson Lie T-duality を調べることも興味深い。 η 変形された主カイラル模型と λ 変形された主カイラル模型は Poisson Lie T-duality で結ばれていることが知られており [91, 92]、 λ 変形された模型も 4 次元 CS 理論の立場から導出されている [22]。よって 4 次元 CS 理論の立場からこれらの関係性を調べることができるであろう。

可換な r -行列を用いた homogeneous YB 変形は、ツイストされた閉弦の境界条件を用いると non-local なゲージ変換とみなすことが出来る [50, 93–96]。このツイストされた境界条件が 4 次元 CS 理論の境界条件とどう対応しているかを見極めることは意義深いであろう。

最後に 2 次元の場の理論の微分同相不変性について言及する必要があるだろう。一連の解析 [18, 20, 21] で得られた非線形シグマ模型は全て共形ゲージで固定されたものであり、4 次元 CS 理論から 2 次元へと簡約する段階で微分同相不変性が失われていることがわかる。[97] において、Green-Schwarz 形式の AdS₅ × S⁵ 超弦理論が世界面の計量を保った形で導出され、4 次元 CS 理論の視点での Virasoro 条件の起源が明らかになった。一方、様々な対称コセットシグマ模型の Pohlmeyer 簡約は拡張された Sine-Gordon 模型になることが知られている [90]。Pohlmeyer 簡約は Virasoro 条件を解くことにより ultralocal な系へと移る手法であるため、non-ultralocal/ultralocal、つまりは disorder/order defect を結ぶ架け橋になることが期待される。4 次元 CS 理論の立場から Pohlmeyer 簡約を解釈することにより、Sine-Gordon 模型を再導出することも可能であろう。

4 次元 CS 理論を導くブレーン配位を同定することも重要な課題である。[98] において order defect を含む 4 次元 CS 理論の作用が弦理論に埋め込めることが示された。もしこの構成が disorder defect にも応用できるならば、disorder defect の量子論的な定式化に繋がるだろう。Chapter 1 で述べたように、non-ultralocality に伴うストリングシグマ模型の量子可積分性の困難は長きにわたる問題である。disorder defect は non-ultralocal な系と密接に関係しており、この構成法はシグマ模型の量子可

積分性に新たな洞察を与える可能性がある。これらの考察が、ひいては様々な可積分変形された超弦理論の厳密な解析へとつながり、ホログラフィー原理のさらなる解明を促すことに期待したい。

Acknowledgement

本稿の執筆にあたり多くの方々にお世話になりましたので、この場で感謝の意を表します。共同研究者である吉田健太郎先生には、研究の様々な場面で指導、助言を頂きました。指導教官である福間将文先生は本論文の原稿に客観的な意見をくださり、お力添えいただきました。素粒子論研究室の教員である川合光先生、畑浩之先生、吉岡興一先生にもお世話になりました。コロナ禍の非常時にはありましたが皆様のおかげさまで本稿の執筆に集中することができました。共同研究研究者の坂本純一さんは幾度となく議論に付き合ってください、理解の助けになる参考文献を紹介していただきました。素粒子論研究室の石井貴昭さん、阿部慶彦さん、春名純一さんは本稿の執筆中、フォーマットや構成などに関して意見をくださいました。研究室の先輩である濱田佑さん、松本信行さん、大島隆弘さん、奥村傑さん、中脇稔貴さん、世田拓也さん、後輩の竹田大地くん、久代翔大くんは普段から私を気遣ってください、良い研究環境を提供してくださいました。

ゼミや研究会を始めとして、共に勉強し、議論をしてきた同期の皆さまにも感謝したいと思います。特に天体核研究室の間仁田侑典くん、高橋卓弥くん、原子核理論研究室の樋沢規宏くん、基礎物理学研究所の菅野颯人くん、大山修平くん、中村大地くん、大畑宏樹くんとは分野を超えて様々な話題の意見を交換し、良い刺激をもらいました。その他学部時代の友人と交わした戯言も励みになりました。最後に、あらゆる面で私を支えてくださった家族に感謝いたします。皆様の理解、協力無しに本論文は完成しませんでした。

Appendix A

Boundary EOMの解き方

この節では boundary EOM(4.2.2) と (4.2.3) の解の構成法について述べる。[19]における特筆すべき点は、 $(A_\alpha, \partial_{\xi_x} A_\alpha)$ を Drinfel'd double の元だとみなすことで boundary EOM を解きうることである。まずは Drinfel'd double についての簡易なレビューを与えよう。(より詳しくは、例えば [99–101] を見よ。)

A.1 Drinfel'd double

Drinfel'd double \mathfrak{d} は、対称かつ随伴不変で非縮退なある内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{d}}$ を持つ Lie 代数である。ベクトル空間としては、Drinfel'd double \mathfrak{d} は部分空間 \mathfrak{g}_s と $\tilde{\mathfrak{g}}_s$ の直和である。

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{g}_s \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_s. \quad (\text{A.1.1})$$

さらに \mathfrak{g}_s 及び $\tilde{\mathfrak{g}}_s$ は \mathfrak{d} の部分 Lie 代数でもあり、これらは同じ次元 $d := \dim \mathfrak{g}_s = \dim \tilde{\mathfrak{g}}_s$ を持っている。今 $\{T_a\}, \{\tilde{T}^a\}$ ($a = 1, \dots, d$) をそれぞれ $\mathfrak{g}_s, \tilde{\mathfrak{g}}_s$ の生成子とする。これらの生成子は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{d}}$ に対して、

$$\langle T_a, T_a \rangle_{\mathfrak{d}} = 0, \quad \langle \tilde{T}^a, \tilde{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}} = 0, \quad \langle T_a, \tilde{T}^b \rangle_{\mathfrak{d}} = \delta_a^b \quad (\text{A.1.2})$$

を満たす。つまり、 \mathfrak{g}_s と $\tilde{\mathfrak{g}}_s$ は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{d}}$ に関して \mathfrak{d} の極大等方部分代数になっている。以上が Drinfel'd double の定義である。

$T_A := (T_a, \tilde{T}^a)$ を定義すると、関係式 (A.1.2) はより簡単な形

$$\langle T_A, T_B \rangle_{\mathfrak{d}} = \eta_{AB} = \begin{pmatrix} 0_d & \delta_a^b \\ \delta^a_b & 0_d \end{pmatrix} \quad (\text{A.1.3})$$

へと書き直すことができる。ここで 0_d は $d \times d$ の零行列を示す。この表式は Drinfel'd double \mathfrak{d} の構造群が $O(d, d)$ であることを意味している。

Drinfel'd double の Lie 代数としての構造を見ていこう。 \mathfrak{d} を定義する代数が

$$[T_A, T_B] = F_{AB}{}^C T_C \quad (\text{A.1.4})$$

で与えられているものとする。 $F_{AB}{}^C$ は \mathfrak{d} の構造定数である。 T_a や \tilde{T}^a の言葉を用いると、上記の代数関係は以下の形に書き直せる。

$$[T_a, T_b] = f_{ab}{}^c T_c, \quad [\tilde{T}^a, \tilde{T}^b] = \tilde{f}^{ab}{}_c \tilde{T}^c, \quad [T_a, \tilde{T}^b] = \tilde{f}^{bc}{}_a T_c - f_{ac}{}^b \tilde{T}^c. \quad (\text{A.1.5})$$

$f_{ab}{}^c := F_{ab}{}^c$ と $\tilde{f}^{ab}{}_c := F^{ab}{}_c$ はそれぞれの部分代数 \mathfrak{g}_s , $\tilde{\mathfrak{g}}_s$ に対する構造定数である。代数 (A.1.5) の 3 つ目の関係式は内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{d}}$ の随伴不変性と (A.1.2) から従う。

$$\begin{cases} \langle [T_a, \tilde{T}^b], T_c \rangle = -\langle \tilde{T}^b, [T_a, T_c] \rangle = -f_{ac}{}^b, \\ \langle [T_a, \tilde{T}^b], \tilde{T}^c \rangle = \langle T_a, [\tilde{T}^b, \tilde{T}^c] \rangle = \tilde{f}^{bc}{}_a, \end{cases} \\ \Leftrightarrow [T_a, \tilde{T}^b] = -f_{ac}{}^b \tilde{T}^c + \tilde{f}^{bc}{}_a T_c. \quad (\text{A.1.6})$$

逆に、極大等方性 (A.1.2) と交換関係 (A.1.5) が成り立てば内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が随伴不変であることが直ちに示せる。

さらに、 \mathfrak{d} に対する Jacobi 恒等式は $f_{ab}{}^c$ と $\tilde{f}^{ab}{}_c$ の間に

$$\tilde{f}^{ce}{}_d f_{ab}{}^d = 4 \tilde{f}^{d[c} f_{a]b]d}{}^e \quad (\text{A.1.7})$$

の関係が成立することを意味する。

定義により、Drinfel'd double \mathfrak{d} は (A.1.3), (A.1.5), (A.1.7) を満たす 2 つの Lie 部分代数 \mathfrak{g} と $\tilde{\mathfrak{g}}$ への分解を持つ。ここで 3 つの組を $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}_s, \tilde{\mathfrak{g}}_s)$ を *Manin triple* と呼ぶ。一般に、Drinfel'd double \mathfrak{d} は異なる Manin triple を複数持ちうる。つまり、分解

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{g}_s \oplus \tilde{\mathfrak{g}}_s = \mathfrak{g}'_s \oplus \tilde{\mathfrak{g}}'_s = \dots \quad (\text{A.1.8})$$

に対して、それぞれの分解が (A.1.3), (A.1.5), (A.1.7) を満たし、 $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}_s, \tilde{\mathfrak{g}}_s)$, $(\mathfrak{d}, \mathfrak{g}'_s, \tilde{\mathfrak{g}}'_s)$, \dots が \mathfrak{d} Manin triple になる。

A.2 Boundary EOM (4.2.2), (4.2.3) の解

前節で述べた Drinfel'd double を使って boundary EOM を解くことを考えよう。 \mathfrak{g}_s や $\tilde{\mathfrak{g}}_s$ が代数として閉じているという事実が、与えた境界条件に対し archipelago 条件を満たすように gauge 変換を施せることを保証している [19]。boundary EOM (4.2.2), (4.2.3) は次の形を取っていた。

$$\epsilon^{ij} \langle (A_i, \partial_{\xi_p} A_i), \delta(A_j, \partial_{\xi_p} A_j) \rangle_{t,p} = 0, \quad p \in \mathfrak{p}. \quad (\text{A.2.1})$$

ここでの二重括弧は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_{t,p} &:= (\text{res}_x \omega) \langle x, x' \rangle + (\text{res}_p \xi_p \omega) (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle) \\ &= K (\langle x, y' \rangle + \langle x', y \rangle). \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

[19, 102] で議論されているように、 $(A_i, \partial_{\xi_p} A_i)$ は線形内積 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{t,p}$ を持つある Drinfel'd double の元とみなすことで、boundary EOM を満たす解となる。以下の議論では、この点を詳述しよう。

Lie 代数 $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_s \times \mathfrak{g}_s$

ベクトル空間 \mathfrak{t} を 2 つの \mathfrak{g}_s の直和に同相な空間として定義する。

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{k} \oplus \tilde{\mathfrak{k}}, \quad (\text{A.2.3})$$

$$\mathfrak{k} = \{(x, 0) | x \in \mathfrak{g}_s\}, \quad (\text{A.2.4})$$

$$\tilde{\mathfrak{k}} = \{(0, y) | y \in \mathfrak{g}_s\}. \quad (\text{A.2.5})$$

定義により、この二重括弧はベクトル空間 \mathfrak{t} 上の対称で非縮退な内積となっている。 \mathfrak{t} の代数構造を調べるために、まずは $(g, \mathcal{A}) := (g, \partial_{\xi} g g^{-1})$ を成分として持つ群 $G_s \times \mathfrak{g}_s$ の積を調べよう。 $G_s \times \mathfrak{g}_s$ の積は Lie 群 G_s の積に誘導されるものとして定義する。

G_s の積は次のように与えられる。

$$G_s \times G_s \rightarrow G_s : (g_1, g_2) \mapsto g_1 \cdot g_2. \quad (\text{A.2.6})$$

すると $(g_i, \mathcal{A}_i) := (g_i, \partial_{\xi} g_i g_i^{-1})$ ($i = 1, 2$) の積として

$$(g_1, \mathcal{A}_1) \cdot (g_2, \mathcal{A}_2) = (g_1 \cdot g_2, \mathcal{A}_1 + \text{Ad}_{g_1}(\mathcal{A}_2)) \quad (\text{A.2.7})$$

が誘導される。ここで、随伴作用 $\text{Ad}_g(x) = g \cdot x \cdot g^{-1}$ for $x \in \mathfrak{g}_s$ を定義する。この積則を用いると、 (g, \mathcal{A}) の群としての逆元は

$$(g, \mathcal{A})^{-1} = (g^{-1}, -\text{Ad}_{g^{-1}}(\mathcal{A})) \quad (\text{A.2.8})$$

と与えられることがわかる。実際、 $(g, \mathcal{A})(g, \mathcal{A})^{-1} = (g, \mathcal{A})^{-1}(g, \mathcal{A}) = (\mathbf{1}, 0)$ であることが確かめられる。よって対応する右不変カレントは

$$-d(g, \mathcal{A}) \cdot (g, \mathcal{A})^{-1} = -(dgg^{-1}, d\mathcal{A} + [\mathcal{A}, dgg^{-1}]) = (A, \partial_{\xi} A) \quad (\text{A.2.9})$$

であり、 \mathfrak{t} に対する随伴作用 $\text{Ad}_{(h, \partial_\xi h h^{-1})} : \mathfrak{t} \rightarrow \mathfrak{t}$ は \mathfrak{g}_s に対する随伴作用から次のように誘導される。

$$\text{Ad}_{(h, \partial_\xi h h^{-1})}((A, \partial_\xi A)) = (\text{Ad}_h(A), \text{Ad}_h(\partial_\xi A) + [\partial_\xi h h^{-1}, \text{Ad}_h A]). \quad (\text{A.2.10})$$

ただし、 $h \in G_s$ である。この随伴作用により、ベクトル空間 \mathfrak{t} に次の交換関係を導入できる。

$$[(x, y), (x', y')]_{\mathfrak{t}} = ([x, x'], [x, y'] - [x', y]). \quad (\text{A.2.11})$$

確かにこの交換関係は半直積 $\mathfrak{g}_s \ltimes \mathfrak{g}_s$ の構造を持っている。また (A.2.18) でみるように、 \mathfrak{t} はこの交換関係に関する Jacobi 恒等式を満たす。以上より、 $\mathfrak{t} = \mathfrak{g}_s \ltimes \mathfrak{g}_s$ は Lie 代数としての構造を持つことがわかった。

さらに、内積 (A.2.2) もこの交換子に対して随伴不変であることがわかる。なぜなら、

$$\begin{aligned} & \langle\langle \text{Ad}_{(h, \partial_\xi h h^{-1})}((x_1, y_1)), \text{Ad}_{(h, \partial_\xi h h^{-1})}((x_2, y_2)) \rangle\rangle_{\mathfrak{t}, p} \\ &= K(\langle \text{Ad}_h x_1, \text{Ad}_h y_2 + [\partial_\xi h h^{-1}, \text{Ad}_h x_2] \rangle + \langle \text{Ad}_h y_1 + [\partial_\xi h h^{-1}, \text{Ad}_h x_1], \text{Ad}_h x_2 \rangle) \\ &= K(\langle x_1, y_2 \rangle + \langle y_1, x_2 \rangle + \langle x_1, [h^{-1} \partial_\xi h, x_2] \rangle + \langle [h^{-1} \partial_\xi h, x_1], x_2 \rangle) \\ &= \langle\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle\rangle_{\mathfrak{t}, p}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.12})$$

最後の等号において、 \mathfrak{g}_s における内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ が随伴不変であるという事実を用いた。

i) Semi-abelian double

内積 (A.2.2) と交換子 (A.2.11) をより詳細に見ていこう。後の便利のために、部分ベクトル空間 \mathfrak{k} と $\tilde{\mathfrak{k}}$ に対する生成子をそれぞれ T_a, \tilde{T}^a と導入しておこう。これらは \mathfrak{g}_s の生成子 t_a ($a = 1, \dots, d := \dim \mathfrak{g}_s$) を用いて次のように表現される。

$$T_a = (t_a, 0), \quad \tilde{T}^a = (0, t^a). \quad (\text{A.2.13})$$

ここで、上付き添字は \mathfrak{g}_s の Killing 形式 η_{ab} を用いて、 $t^a := t_b \eta^{ab}$ と定義される。ただし t_a の次のように規格化されている。

$$\langle t_a, t_b \rangle = \eta_{ab}. \quad (\text{A.2.14})$$

すると、 $T_A = (T_a, \tilde{T}^a)$ に対し、

$$\langle\langle T_A, T_B \rangle\rangle_{\mathfrak{t}, x} = K \eta_{AB} \quad (\text{A.2.15})$$

が従う。ここでの η_{AB} は (A.1.3) で定義されたものである。同値な言い換えとして、 \mathfrak{k} と $\tilde{\mathfrak{k}}$ が内積 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathfrak{t}, x}$ に関して極大等方であるとも言える。 $f_{ab}{}^c$ を \mathfrak{g}_s の構造定数とすると、 $T_A = (T_a, \tilde{T}^a)$ の交換関係は

$$[T_a, T_b]_{\mathfrak{t}} = f_{ab}{}^c T_c, \quad [\tilde{T}^a, \tilde{T}^b]_{\mathfrak{t}} = 0, \quad [T_a, \tilde{T}^b]_{\mathfrak{t}} = -f_{ac}{}^b \tilde{T}^c \quad (\text{A.2.16})$$

となり、確かに前節での一般論 (A.1.6) と一致している。以上より、代数構造

$$\mathfrak{k} = \mathfrak{g}_s \times \{0\}, \quad \tilde{\mathfrak{k}} = \{0\} \times \mathfrak{g}_{ab} \quad (\text{A.2.17})$$

を読み取れる。ここで、 $\mathfrak{g}_{s,ab}$ は次元 $\dim \mathfrak{g}_{s,ab} = d$ を持つ可換代数である。さらに、生成子 T_A は Jacobi 恒等式

$$[[T_A, T_B], T_C] + [[T_B, T_C], T_A] + [[T_C, T_A], T_B] = 0 \quad (\text{A.2.18})$$

満たすことを確かめられる。従って、 \mathfrak{t} は Manin triple $(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \tilde{\mathfrak{k}})$ と内積 (A.2.2) を伴った Drinfel'd double である。Drinfel'd double $(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_s)$ はしばしば *semi-abelian double* と呼ばれる。

結果として、

$$(A_i, \partial_{\xi_p} A_i) \in \mathfrak{k} \quad \text{or} \quad (A_i, \partial_{\xi_p} A_i) \in \tilde{\mathfrak{k}} \quad (\text{A.2.19})$$

という条件を課すことにより boundary EOM を解くことができることがわかる。この境界条件を取ったとき、構造群 G_s を持つ主カイラルモデルを得る。

ii) β 変換された解

Drinfel'd double \mathfrak{t} に対するより非自明な Manin triple として、 $(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_s \times \{0\}, \mathfrak{g}_{s,R})$ が考えられる。この代数構造は、

$$\begin{aligned} [T'_a, T'_b]_{\mathfrak{t}} &= f_{ab}{}^c T'_c, & [\tilde{T}'^a, \tilde{T}'^b]_{\mathfrak{t}} &= \tilde{f}^{ab}{}_c \tilde{T}'^c, \\ [T'_a, \tilde{T}'^b]_{\mathfrak{t}} &= \tilde{f}^{cb}{}_a T'_c - f_{ac}{}^b \tilde{T}'^c, \end{aligned} \quad (\text{A.2.20})$$

と与えられる。ここで T'_a と \tilde{T}'^a は、それぞれ $\mathfrak{g}_s \times \{0\}$ と $\mathfrak{g}_{s,R}$ の生成子である。 $\mathfrak{g}_{s,R}$ の構造定数 $\tilde{f}^{ab}{}_c$ は次のように定義される。

$$\tilde{f}^{ab}{}_c = \eta r^{ad} f_{dc}{}^b - \eta r^{bd} f_{dc}{}^a. \quad (\text{A.2.21})$$

ここでの η は実パラメータである。 $\eta = 0$ の時、上の Manin triple は先に導入した (A.2.17) に帰結する。定数行列 r^{ab} は歪対称 $r^{ab} = -r^{ba}$ で、hCYBE

$$f_{e_1 e_2}{}^a r^{be_1} r^{ve_2} + f_{e_1 e_2}{}^b r^{ce_1} r^{ae_2} + f_{e_1 e_2}{}^c r^{ae_1} r^{be_2} = 0 \quad (\text{A.2.22})$$

を満たすものを取る。この解として、古典 r -行列 $r \in \mathfrak{g}_s \otimes \mathfrak{g}_s$ はテンソル表記で

$$r = \frac{1}{2} r^{ab} t_a \wedge t_b = \frac{1}{2} r^{ab} (t_a \otimes t_b - t_b \otimes t_a) \quad (\text{A.2.23})$$

を持つ。 r^{ab} が hCYBE を満たすという事実は、 \tilde{f}^{ab}_c が Jacobi 恒等式を満たすことを保証し、すなわち $\mathfrak{g}_{s,R}$ が \mathfrak{t} の部分代数であることが従う。

興味深いことに、2つの Manin triple $(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \tilde{\mathfrak{k}})$ と $(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_s \times \{0\}, \mathfrak{g}_{s,R})$ は互いに $O(d, d)$ 変換で結びついている。¹

$$\begin{aligned} T'_A &= T_B \mathcal{O}^B_A, \\ \mathcal{O}^B_A &= \begin{pmatrix} \mathcal{O}^b_a & \mathcal{O}^{ba} \\ \mathcal{O}_{ba} & \mathcal{O}_{b^a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta^b_a & \eta r^{ba} \\ 0_d & \delta^a_b \end{pmatrix} \in O(d, d). \end{aligned} \quad (\text{A.2.24})$$

あるいは同値な表現として、

$$T'_a = T_a, \quad \tilde{T}'^a = \tilde{T}^a + \eta T_b r^{ba} \quad (\text{A.2.25})$$

が成立する。変換 (A.2.24) は \mathfrak{t} の生成子に対する β 変換であり、この変換は $O(d, d)$ 計量 (A.2.15) を保存する。²(よって $\mathfrak{g}_s \times \{0\}$, $\mathfrak{g}_{s,R}$ の極大等方性が従う。) この視点を援用すると、Lie 代数 $\mathfrak{g}_{s,R}$ の明示的な元を議論できる。変換則 (A.2.25) を用いると、変形された変形された双対生成子 \tilde{T}'^a は

$$\tilde{T}'^a = \tilde{T}^a + \eta T_b r^{ba} = (0, t^a) + (\eta R(t^a), 0) = (\eta R(t^a), t^a) \quad (\text{A.2.26})$$

となる。ここで、 R -作用素 $R: \mathfrak{g}_s \rightarrow \mathfrak{g}_s$ は

$$R(x) := \frac{1}{2} r^{ab} (t_a \langle t_b, x \rangle - t_b \langle t_a, x \rangle), \quad x \in \mathfrak{g}_s. \quad (\text{A.2.27})$$

と定義されている。 R -作用素の言葉でいうと、hCYBE (A.2.23) は次のように書き直せる。

$$\text{CYBE}(x, y) = [R(x), R(y)] - R([R(x), y] + [x, R(y)]) = 0, \quad x, y \in \mathfrak{g}_s. \quad (\text{A.2.28})$$

以上より、Lie 代数 $\mathfrak{g}_{s,R}$ は

$$\mathfrak{g}_{s,R} = \{(\eta R(x), x) \mid x \in \mathfrak{g}_s\} \quad (\text{A.2.29})$$

と表現できる。このように、Manin triple $(\mathfrak{t}, \mathfrak{g}_s \times \{0\}, \mathfrak{g}_{s,R})$ は $(\mathfrak{t}, \mathfrak{k}, \tilde{\mathfrak{k}})$ から $O(d, d)$ 変換 (A.2.24) によって生成される。特にこの事実は、homogeneous YB 変形は Lie 代数の視点からは β 変換とみなせるということを意味する [100, 105, 106]。

¹ この関係は 6 次元の Drinfel'd double の分類で発見された [103, 104]。

² $O(d, d)$ 計量を保存するために、 r^{ab} が歪対称であるという事実が効いている。

先の場合と同様に、boundary EOM は境界条件

$$(A_i, \partial_{\xi_p} A_i) \in (\mathfrak{g}_s \times \{0\}) \quad \text{or} \quad (A_i, \partial_{\xi_p} A_i) \in \mathfrak{g}_{s,R} \quad (\text{A.2.30})$$

を取ることににより解くことができる。この2つ目の境界条件は、 G_s -主カイラル模型の古典 r -行列 (A.2.22) による homogeneous YB 変形を導く。

A.3 Boundary EOM (4.2.4) に対する解

他の Drinfel'd double として、ベクトル空間 \mathfrak{g}_s^δ と $\mathfrak{g}_{s,R}$ の直和 \mathfrak{h}_s を考える。

$$\mathfrak{h}_s := \mathfrak{g}_s^\delta \oplus \mathfrak{g}_{s,R}, \quad (\text{A.3.1})$$

$$\mathfrak{g}_s^\delta := \{(x, x) | x \in \mathfrak{g}\}, \quad (\text{A.3.2})$$

$$\mathfrak{g}_{s,R} := \{((R-i)x, (R+i)x) | x \in \mathfrak{g}\}. \quad (\text{A.3.3})$$

線形 R -作用素は \mathfrak{g} に対する Drinfel'd-Jimbo 型の r -行列と紐づいており、 $c = i$ の時の mCYBE (2.2.25) を満たす。ベクトル空間 \mathfrak{h}_s , \mathfrak{g}_s^δ 及び $\mathfrak{g}_{s,R}$ は (4.2.9), (4.2.10), (4.2.11) に対応しており、以下の議論はこれらの複素化に対しても同様に当てはまることに注意されたい。(4.2.10) は boundary EOM (4.2.4) の解となることをみよう。つまり、以下では \mathfrak{h}_s が Drinfel'd double とみなせることを示す。

始めに、ベクトル部分空間 $\mathfrak{g}_s^\delta, \mathfrak{g}_{s,R}$ の基底として、それぞれ次のものを取る。

$$T_a = (t_a, t_a), \quad \tilde{T}^a = ((R-i)t^a, (R+i)t^a). \quad (\text{A.3.4})$$

ここで t^a は (A.2.14) を満たす \mathfrak{g} の生成子である。 \mathfrak{h}_s 上の内積は

$$\langle\langle (x, y), (x', y') \rangle\rangle_{\mathfrak{h}_s} := \frac{i}{2} (\langle x, x' \rangle - \langle y, y' \rangle) \quad (\text{A.3.5})$$

と定義され、これは全体のファクターを除いて (4.2.7) のものと一致している。容易にこれらの生成子が

$$\langle\langle T_A, T_B \rangle\rangle_{\mathfrak{h}_s} = \eta_{AB} \quad (\text{A.3.6})$$

を満たすことを示せる。内積 $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle_{\mathfrak{h}_s}$ を定義することによって、 \mathfrak{g}_s^δ と $\mathfrak{g}_{s,R}$ が極大等方で閉じた代数であることを示すことができる。

次に、 \mathfrak{h}_s の Lie 代数としての構造を調べよう。特に、 \mathfrak{g}_s^δ と $\mathfrak{g}_{s,R}$ が関係式 (A.1.5), (A.1.7) を満たすことを具体的に見る。定義より、 T_a は通常の交換関係

$$[T_a, T_b]_{\mathfrak{h}_s} = f_{ab}{}^c T_c, \quad (\text{A.3.7})$$

を満たす。ここで \mathfrak{h}_s 上の交換子 $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{h}_s}$ を次のように定義する。

$$[(x, y), (x', y')]_{\mathfrak{h}_s} := ([x, x'], [y, y']). \quad (\text{A.3.8})$$

\tilde{T}^a の交換関係は

$$[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b]_{\mathfrak{h}_s} = \left([(R-i)t^a, (R-i)t^b], [(R+i)t^a, (R+i)t^b] \right) \quad (\text{A.3.9})$$

と与えられるが、(A.3.9) の各成分は、

$$\begin{aligned} [(R \pm i)t^a, (R \pm i)t^b] &= [R(t^a), R(t^b)] \pm i[t^a, (R \pm i)t^b] \pm i[(R \pm i)t^a, R(t^b)] - [t^a, t^b] \\ &= (R \pm i) \left([R(t^a), t^b] + [t^a, R(t^b)] \right) \\ &= (r^{ac} f_{cd}{}^b - r^{bc} f_{cd}{}^a)(R \pm i)(t^d) \end{aligned} \quad (\text{A.3.10})$$

と評価できる。2つ目の統合では、 R が mCYBE (2.2.25) を満たすことを用いた。 R -作用素をテンソル表示したものが r^{ab} であるが、これらの間には

$$R(t^a) = -r^a{}_c t^c \quad (\text{A.3.11})$$

という関係があり、mCYBE は次の形をとる。

$$f_{e_1 e_2}{}^a r^{b e_1} r^{c e_2} + f_{e_1 e_2}{}^b r^{c e_1} r^{a e_2} + f_{e_1 e_2}{}^c r^{a e_1} r^{b e_2} = f^{abc}. \quad (\text{A.3.12})$$

従って \tilde{T}^a は交換関係

$$[\tilde{T}^a, \tilde{T}^b]_{\mathfrak{h}_s} = \tilde{f}^{ab}{}_c \tilde{T}^c \quad (\text{A.3.13})$$

を満たし、構造定数 $\tilde{f}^{ab}{}_c$ は

$$\tilde{f}^{ab}{}_c = r^{ad} f_{dc}{}^b - r^{bd} f_{dc}{}^a \quad (\text{A.3.14})$$

と与えられる。特に、mCYBE(2.2.25) が成立するために構造定数 (A.3.14) は Jacobi 恒等式を満たし、つまり $\mathfrak{g}_{s,R}$ は Lie 代数である。さらに、(A.3.14) の表式を用いると

$$[t_a, (R \pm i)t^b] = \tilde{f}^{bc}{}_a t_c - f_{ac}{}^b (R \pm i)t^c \quad (\text{A.3.15})$$

を得るが、これは関係式

$$[T_a, \tilde{T}^b]_{\mathfrak{h}_s} = ([t_a, (R-i)t^b], [t_a, (R+i)t^b]) = \tilde{f}^{bc}{}_a T_c - f_{ac}{}^b \tilde{T}^c \quad (\text{A.3.16})$$

を意味する。これは随伴不変な内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathfrak{h}_s}$ と \mathfrak{g}_s^δ , $\mathfrak{g}_{s,R}$ の極大等方性から従う結果と確かに一致している。 $f_{ab}{}^c$ 及び $\tilde{f}^{ab}{}_c$ が Jacobi 恒等式より (A.1.7) を満たすことも具体的に示せる。以上より、 \mathfrak{h}_s は Drinfel'd double とみなせる。

Appendix B

λ -mapの表現

(4.4.4)における λ -mapの具体的な表現を議論しよう。

例として、Cartan生成子の一つ(例えば H_1)を用いて、整数 k_α でラベルされる半群準同型¹ $\alpha \mapsto \lambda_\alpha$ が次のように構成できる。

$$\lambda_\alpha = -i \frac{\alpha(H_1)}{\bar{\alpha}} \pi := -ik_\alpha \pi. \quad (\text{B.0.1})$$

ここで $\bar{\alpha}$ は定数である。すると、自己同型写像 $\Sigma : \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \rightarrow \mathfrak{g}^{\mathbb{C}}$ は

$$\Sigma(E_\alpha) := -i \frac{\alpha(H_1)}{\bar{\alpha}} E_\alpha = -ik_\alpha E_\alpha, \quad \Sigma(H_\alpha) = 0 \quad (\text{B.0.2})$$

となる。これを用いた指数写像 $\exp(\pi\Sigma)$ は $\bar{\alpha}$ の値を適切に選ぶことにより、確かに \mathbb{Z}_2 -gradingの性質を持たせることができる。

$\mathfrak{su}(n)$ を具体例に取って考えよう。 $\mathfrak{su}(n)$ の基本表現のウェイトは以下の標準形で与えられる。(例えば [107]を見よ。)

$$\begin{aligned} \nu^1 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)n}} \right), \\ \nu^2 &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)n}} \right), \\ \nu^3 &= \left(0, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)n}} \right), \\ &\vdots \\ \nu^{m+1} &= \left(0, 0, \dots, -\frac{m}{\sqrt{2m(m+1)}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{2(n-1)n}} \right), \end{aligned}$$

¹ルート系は零ベクトルを含まないため加群ではない。

$$\begin{aligned} & \vdots \\ \nu^n &= \left(0, 0, \dots, 0, \dots, -\frac{n-1}{\sqrt{2(n-1)n}} \right). \end{aligned} \quad (\text{B.0.3})$$

単純ルートはこれらのウェイトの差として、²

$$\alpha^{(m)} = \nu^m - \nu^{m+1} \quad (m = 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{B.0.4})$$

と表される。従って、 $\bar{\alpha} = 1/2$ と取ることにより、任意のルートの第1成分は次のように与えられる。

$$\alpha(H_1) = m_1 \times 1 + m_2 \times (-1/2) := k_\alpha/2 \quad (m_1, m_2, k_\alpha \in \mathbb{Z}). \quad (\text{B.0.5})$$

よって $\mathfrak{su}(n)$ に対する λ -map を実際に構成できた。

²ここでのコンベンションは [107] での正ルートのものとは逆の順番になっている。[107] の Chapter 13 を見よ。

Appendix C

新型 YB 変形 (4.4.29) の可積分性の直接証明

ここでは新たな系 (4.4.29) の古典可積分であることを証明する。つまり、作用 (4.4.29) に対する運動方程式が Lax pair (4.4.22) の平坦性条件と同値であることを示す。4次元 CS 理論による構成方法により可積分性は保証されているが、Lax pair の構造を詳細に調べることはやはり有用である。

C.1 作用 (4.4.29) に対する運動方程式

第一に作用 (4.4.29) の運動方程式を導出しよう。次の無限小変分

$$\begin{aligned} g \mapsto g + \delta g = g + g\epsilon &\implies \delta j = d\epsilon + [j, \epsilon] \\ &\iff \begin{cases} \delta j_+ = \partial_+ \epsilon + [j_+, \epsilon] \\ \delta j_- = \partial_- \epsilon + [j_-, \epsilon] \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{C.1.1})$$

を (4.4.29) に対して取ると、

$$\begin{aligned} \delta S[g] = & \frac{1 + \eta^2}{2} \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \left[- \left\langle \epsilon, \partial_+ \left(\frac{2}{1 - \eta^2 R^2} j_- \right) + \partial_- \left(\frac{2}{1 - \eta^2 R^2} j_+ \right) \right. \right. \\ & \left. \left. + \left[j_-, \frac{2}{1 - \eta^2 R^2} j_+ \right] + \left[j_+, \frac{2}{1 - \eta^2 R^2} j_- \right] \right\rangle \right] \\ & - \eta \int_{\mathcal{M}} d\tau \wedge d\sigma \left\langle \epsilon, -\partial_+ \left(\Sigma^{(e)} R j_- \right) + \partial_- \left(\Sigma^{(e)} R j_+ \right) - \left[j_+, \Sigma^{(e)} R j_- \right] + \left[j_-, \Sigma^{(e)} R j_+ \right] \right\rangle \end{aligned} \quad (\text{C.1.2})$$

となる。ここで (4.4.6) における k_α が偶数と奇数の空間への射影演算子を次のように定義した。

$$\Sigma^{(e)} := \frac{1 + \exp[\pi\Sigma]}{2}, \quad \Sigma^{(o)} := \frac{1 - \exp[\pi\Sigma]}{2}. \quad (\text{C.1.3})$$

従って系の運動方程式は

$$\begin{aligned}
0 = & (1 + \eta^2) \left[\partial_+ \left(\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} j_- \right) + \partial_- \left(\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} j_+ \right) \right. \\
& \left. + \left[j_-, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} j_+ \right] + \left[j_+, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} j_- \right] \right] \\
& - \eta \left[\partial_+ \left(\Sigma^{(e)} R j_- \right) - \partial_- \left(\Sigma^{(e)} R j_+ \right) + \left[j_+, \Sigma^{(e)} R j_- \right] - \left[j_-, \Sigma^{(e)} R j_+ \right] \right]
\end{aligned} \tag{C.1.4}$$

と表せる。この運動方程式は次のように even part と odd part に分解できることに注目せよ。

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}^{(e)} + \mathcal{E}^{(o)} = 0, \tag{C.1.5}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(e)} := & (1 + \eta^2) \left[\partial_+ \left(\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_- \right) + \partial_- \left(\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_+ \right) \right. \\
& \left. + \left[\Sigma^{(e)} j_-, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_+ \right] + \left[\Sigma^{(e)} j_+, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_- \right] \right] \\
& - \eta \left[\partial_+ \left(\Sigma^{(e)} R j_- \right) - \partial_- \left(\Sigma^{(e)} R j_+ \right) + \left[\Sigma^{(e)} j_+, \Sigma^{(e)} R j_- \right] - \left[\Sigma^{(e)} j_-, \Sigma^{(e)} R j_+ \right] \right],
\end{aligned} \tag{C.1.6}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^{(o)} := & (1 + \eta^2) \left[\partial_+ \left(\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)} j_- \right) + \partial_- \left(\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)} j_+ \right) \right. \\
& \left. + \left[\Sigma^{(o)} j_-, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_+ \right] + \left[\Sigma^{(o)} j_+, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_- \right] \right. \\
& \left. + \left[\Sigma^{(e)} j_-, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)} j_+ \right] + \left[\Sigma^{(e)} j_+, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)} j_- \right] \right] \\
& - \eta \left[\left[\Sigma^{(o)} j_+, \Sigma^{(e)} R j_- \right] - \left[\Sigma^{(o)} j_-, \Sigma^{(e)} R j_+ \right] \right].
\end{aligned} \tag{C.1.7}$$

ここで、関係式

$$\begin{aligned}
& \left[\Sigma^{(o)} j_-, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)} j_+ \right] + \left[\Sigma^{(o)} j_+, \frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)} j_- \right] \\
& = \left[\Sigma^{(o)} j_-, \frac{1}{1 + \eta^2} \Sigma^{(o)} j_+ \right] + \left[\Sigma^{(o)} j_+, \frac{1}{1 + \eta^2} \Sigma^{(o)} j_- \right] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{C.1.8}$$

を用いた。まとめると、運動方程式は

$$\mathcal{E}^{(e)} = \mathcal{E}^{(o)} = 0 \tag{C.1.9}$$

であることを意味する。

C.2 (4.4.22) の平坦性条件の評価

次に Lax pair (4.4.22) に対する平坦性条件を調べよう。

この Lax pair は前節で定義した射影演算子 $\Sigma^{(e)}$ と $\Sigma^{(o)}$ を用いて

$$\mathcal{L}_{\pm}^R = \frac{1}{1 \pm z_L} \left[\left(1 \mp \frac{\eta z_L (\eta \pm R)}{1 \mp \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_{\pm} + \sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_{\pm} \right] \quad (\text{C.2.1})$$

と表される。ここで、スペクトラルパラメータ及び変形パラメータは次のように変換されている。

$$z_L = \frac{\tanh z_R}{\tanh \alpha}, \quad -i\eta = \tanh \alpha. \quad (\text{C.2.2})$$

この Lax pair から、以下の表式が直ちに得られる。

$$\begin{aligned} \partial_+ \mathcal{L}_-^R - \partial_- \mathcal{L}_+^R &= \frac{1}{1 - z_L^2} \left[\left(1 + z_L \left(1 + \frac{\eta(\eta - R)}{1 + \eta R} \right) + z_L^2 \frac{\eta(\eta - R)}{1 + \eta R} \right) \partial_+ \Sigma^{(e)} j_- \right. \\ &\quad \left. - \left(1 - z_L \left(1 + \frac{\eta(\eta + R)}{1 - \eta R} \right) + z_L^2 \frac{\eta(\eta + R)}{1 - \eta R} \right) \partial_- \Sigma^{(e)} j_+ \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{1 + \eta^2 z_L^2}}{1 - z_L^2} \left\{ (1 + z_L) \partial_+ \Sigma^{(o)} j_- - (1 - z_L) \partial_- \Sigma^{(o)} j_+ \right\}, \end{aligned} \quad (\text{C.2.3})$$

$$\begin{aligned} &[\mathcal{L}_+^R, \mathcal{L}_-^R] \\ &= \frac{1}{1 - z_L^2} \left(\left[\left(1 - \frac{\eta z_L (\eta + R)}{1 - \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_+, \sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_- \right] \right. \\ &\quad + \left[\sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_+, \left(1 + \frac{\eta z_L (\eta - R)}{1 + \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_- \right] \\ &\quad + \left[\left(1 - \frac{\eta z_L (\eta + R)}{1 - \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_+, \left(1 + \frac{\eta z_L (\eta - R)}{1 + \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_- \right] \\ &\quad \left. + \left[\sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_+, \sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_- \right] \right). \end{aligned} \quad (\text{C.2.4})$$

よって Lax pair (C.2.1) の平坦性条件は

$$0 = \partial_+ \mathcal{L}_-^R - \partial_- \mathcal{L}_+^R + [\mathcal{L}_+^R, \mathcal{L}_-^R] = \frac{1}{1 - z_L^2} \left(\mathcal{F}^{(e)} + \sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \mathcal{F}^{(o)} \right). \quad (\text{C.2.5})$$

と評価される。ここで、 $\mathcal{F}^{(e)}$ 及び $\mathcal{F}^{(o)}$ は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(e)} &:= \left(1 + z_L \left(1 + \frac{\eta(\eta - R)}{1 + \eta R} \right) + z_L^2 \frac{\eta(\eta - R)}{1 + \eta R} \right) \partial_+ \Sigma^{(e)} j_- \\ &\quad - \left(1 - z_L \left(1 + \frac{\eta(\eta + R)}{1 - \eta R} \right) + z_L^2 \frac{\eta(\eta + R)}{1 - \eta R} \right) \partial_- \Sigma^{(e)} j_+ \\ &\quad + \left[\left(1 - \frac{\eta z_L (\eta + R)}{1 - \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_+, \left(1 + \frac{\eta z_L (\eta - R)}{1 + \eta R} \right) \Sigma^{(e)} j_- \right] \\ &\quad + \left[\sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_+, \sqrt{1 + \eta^2 z_L^2} \Sigma^{(o)} j_- \right], \end{aligned} \quad (\text{C.2.6})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(o)} := & (1 + z_L)\partial_+\Sigma^{(o)}j_- - (1 - z_L)\partial_-\Sigma^{(o)}j_+ \\ & + \left[\left(1 - \frac{\eta z_L(\eta + R)}{1 - \eta R}\right) \Sigma^{(e)}j_+, \Sigma^{(o)}j_- \right] + \left[\Sigma^{(o)}j_+, \left(1 + \frac{\eta z_L(\eta - R)}{1 + \eta R}\right) \Sigma^{(e)}j_- \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.2.7})$$

まとめると、平坦性条件は

$$\mathcal{F}^{(e)} = \mathcal{F}^{(o)} = 0 \quad (\text{C.2.8})$$

となる。

C.3 (C.1.9) と (C.2.8) の比較

(4.4.29) の可積分性を示す上で残された仕事は、運動方程式 (C.1.9) と任意のスペクトルパラメータ z_L に対する平坦性条件 (C.2.8) が同値性を示すことである。 \mathbb{Z}_2 -grading の性質より、これらの関係が even part と odd part それぞれで成立しているば十分である。

この関係を満たすために、偶奇それぞれの off-shell 平坦性条件を用いる。

$$\mathcal{Z}^{(e)} := \partial_+\Sigma^{(e)}j_- - \partial_-\Sigma^{(e)}j_+ + [\Sigma^{(e)}j_+, \Sigma^{(e)}j_-] + [\Sigma^{(o)}j_+, \Sigma^{(o)}j_-] = 0, \quad (\text{C.3.1})$$

$$\mathcal{Z}^{(o)} := \partial_+\Sigma^{(o)}j_- - \partial_-\Sigma^{(o)}j_+ + [\Sigma^{(e)}j_+, \Sigma^{(o)}j_-] + [\Sigma^{(o)}j_+, \Sigma^{(e)}j_-] = 0. \quad (\text{C.3.2})$$

The odd part

Drinfel'd-Jimbo 型の R -作用素は次の関係を満たす。

$$\frac{1}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(o)}j_{\pm} = \frac{1}{1 + \eta^2} \Sigma^{(o)}j_{\pm}, \quad R(1 + R^2)j_{\pm} = 0. \quad (\text{C.3.3})$$

これらを用いると、

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{(o)} = & z_L \mathcal{E}^{(o)} - z_L \left(\left[\frac{\eta^3 R(1 + R^2)}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)}j_+, \Sigma^{(o)}j_- \right] + \left[\Sigma^{(o)}j_+, \frac{\eta^3 R(1 + R^2)}{1 - \eta^2 R^2} \Sigma^{(e)}j_- \right] \right) \\ & + \mathcal{Z}^{(o)} \\ = & z_L \mathcal{E}^{(o)} + \mathcal{Z}^{(o)} = z_L \mathcal{E}^{(o)} \end{aligned} \quad (\text{C.3.4})$$

となることがわかる。ここから次の関係が従う。

$$\mathcal{E}^{(o)} = 0 \iff \mathcal{F}^{(o)} = 0 \quad (\forall z_L \in \mathbb{C}). \quad (\text{C.3.5})$$

The even part

odd part の時と同様に、even part の平坦性条件は

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^{(e)} = & z_{\mathbb{L}} \left(\mathcal{E}^{(e)} - \partial_+ \left(\frac{\eta^3 R(1+R^2)}{1-\eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_- \right) + \partial_- \left(\frac{\eta^3 R(1+R^2)}{1-\eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_+ \right) \right. \\
& + \left[\Sigma^{(e)} j_+, \Sigma^{(e)} j_- \right] - \left[\frac{\eta^3 R(1+R^2)}{1-\eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_+, \Sigma^{(e)} j_- \right] \\
& \left. - \left[\Sigma^{(e)} j_+, \Sigma^{(e)} j_- \right] - \left[\Sigma^{(e)} j_+, \frac{\eta^3 R(1+R^2)}{1-\eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_- \right] \right) \\
& - z_{\mathbb{L}}^2 \left(\eta R \left(\mathcal{E}^{(e)} \right) + \eta R \left(-\partial_+ \left(\frac{\eta^3 R(1+R^2)}{1-\eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_- \right) + \partial_- \left(\frac{\eta^3 R(1+R^2)}{1-\eta^2 R^2} \Sigma^{(e)} j_+ \right) \right) \right. \\
& \left. - \eta^2 (1+\eta^2) \text{mCYBE} \left(\frac{1}{1-\eta R} \Sigma^{(e)} j_+, \frac{1}{1+\eta R} \Sigma^{(e)} j_- \right) \right) \\
& + (1+z_{\mathbb{L}}^2 \eta^2) \mathcal{Z}^{(e)}
\end{aligned} \tag{C.3.6}$$

と書き直せる。ここで導入された記号 $\text{mCYBE}(X, Y)$ は次のように定義されている。

$$\text{mCYBE}(X, Y) := [R(X), R(Y)] - R([R(X), Y] + [X, R(Y)]) - [X, Y] = 0, \quad (X, Y \in \mathfrak{g}). \tag{C.3.7}$$

また (C.3.6) を評価する上で、Drinfel'd-Jimbo 型の R -作用素について成り立つ式

$$\left(\pm \frac{1+\eta^2}{1-\eta^2 R^2} + \eta R \right) j_{\pm} = \left(\pm \frac{1+\eta^2}{1-\eta R} \right) j_{\pm} \tag{C.3.8}$$

を用いた。これは R -作用素が $R \rightarrow 0$, $\mp i$ のように作用することから従う。

結局、平坦性条件は次のようになる。

$$\mathcal{F}^{(e)} = z_{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(e)} - z_{\mathbb{L}}^2 \eta R \left(\mathcal{E}^{(e)} \right) + (1+z_{\mathbb{L}}^2 \eta^2) \mathcal{Z}^{(e)} = z_{\mathbb{L}} \mathcal{E}^{(e)} - z_{\mathbb{L}}^2 \eta R \left(\mathcal{E}^{(e)} \right), \quad (\forall z_{\mathbb{L}} \in \mathbb{C}). \tag{C.3.9}$$

よって直ちに

$$\mathcal{E}^{(e)} = 0 \iff \mathcal{F}^{(e)} = 0 \quad (\forall z_{\mathbb{L}} \in \mathbb{C}) \tag{C.3.10}$$

を得る。

Appendix D

η 変形された $SL(2, \mathbb{R})$ 主カイラル模型のスケーリング極限

ここでは $SL(2, \mathbb{R})$ 主カイラル模型の η 変形を考える。この場合、標的空間の幾何は warped AdS_3 となる。この幾何に対して、スケーリング極限 [108] と 3次元 Schrödinger 時空 [109] を考えることができる。このスケーリング極限を有理型 1-形式 ω の立場で見直していこう。

D.1 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対する古典 r -行列

まずは Lie 代数 $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の記法を導入する。

$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の生成子を $T_a (a = 0, 1, 2)$ とし、以下の交換関係を満たすものとする。

$$[T_a, T_b] = \varepsilon_{ab}{}^c T_c. \quad (\text{D.1.1})$$

構造定数は $\varepsilon_{ab}{}^c := \varepsilon_{abd} \eta^{dc}$ で与えられる。ここで $\eta_{ab} = \text{diag}(-1, 1, 1)$ であり、反対称テンソル ε_{abc} は $\varepsilon_{012} = 1$ と規格化されている。

Pauli 行列 σ^a を用いると、基本表現における生成子は

$$T_0 = \frac{i}{2} \sigma^2, \quad T_1 = \frac{1}{2} \sigma^1, \quad T_2 = \frac{1}{2} \sigma^3 \quad (\text{D.1.2})$$

と表せる。この表現を考えると、変形された作用 (4.4.13) における括弧 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ はトレース Tr に置き換えられ、その規格化は

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \eta_{ab}, \quad \text{Tr}(T_+ T_-) = -1 \quad (\text{D.1.3})$$

で与えられる。ここで光円錐の添字は $T_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(T_0 \pm T_1)$ と定義されている。

$SL(2, \mathbb{R})$ の場合は、3つのタイプの古典 r -行列

$$\text{space-like : } r_s := 2T_2 \wedge T_0, \quad (\text{D.1.4})$$

$$\text{time-like : } r_t := 2T_2 \wedge T_1, \quad (\text{D.1.5})$$

$$\text{light-like : } r_l := 2T_2 \wedge T_-, \quad (\text{D.1.6})$$

を考えることができる。ここで r_s , r_t , 及び r_l はそれぞれ space-like, time-like, light-like な r -行列と呼ばれる。それぞれの r -行列が満たす YB 方程式、及びこれらに関連する R -作用素によって YB 変形された AdS_3 時空を以下の Table D.1 に示す。hCYBE による AdS_3 の変形は [45] において Schrödinger 時空と同定された。space-like と time-like な r -行列に基づく変形はしばしば η 変形と呼ばれる。

	r -行列	対応する YB 方程式	変形された時空
space-like	$r_s = 2T_2 \wedge T_0$	split 型 mCYBE	space-like warped AdS_3 時空
time-like	$r_t = 2T_2 \wedge T_1$	non-split 型 mCYBE	time-like warped AdS_3 時空
light-like	$r_l = 2T_2 \wedge T_-$	hCYBE	Schrödinger 時空

Table D.1: $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ に対する r -行列

[108] で述べられているように、light-like の場合は space(time)-like warped AdS_3 時空のスケーリング極限として実現される。

D.2 η 変形された $SL(2, \mathbb{R})$ 主カイラル模型のスケーリング極限

time-like な r -行列 r_t (D.1.5) によって η 変形された $SL(2, \mathbb{R})$ 主カイラル模型に対して、スケーリング極限を取ることにより light-like な変形を得ることを考える。

まず η 変形された作用は、

$$S_{\text{YB}}[g] = \frac{1 + \tilde{\eta}^2}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \text{Tr} \left(g^{-1} \partial_- g \frac{1}{1 - \tilde{\eta} R_t} g^{-1} \partial_+ g \right) \quad (\text{D.2.1})$$

である。ここで $\tilde{\eta}$ は正の実パラメータであり、 $g \in SL(2, \mathbb{R})$ である。 R -作用素 $R_t : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ は (D.1.5) で定義された r_t によるものであり、各生成子に対して次のように作用する。

$$R_t(iT_1 \pm T_2) := \pm i(iT_1 \pm T_2), \quad R_t(T_0) = 0. \quad (\text{D.2.2})$$

この R_t が non-split 型の mCYBE

$$\text{CYBE}(x, y) = \frac{1}{4}[x, y], \quad x, y \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad (\text{D.2.3})$$

を満たすことは容易に確かめられる。上記の変形された作用は 4 次元 CS 理論の作用 (3.3.2) において適切な境界条件を課すことで得られる [19]。

次に light-like な r -行列 (D.1.6) による YB 変形された作用が η 変形された作用 (D.2.1) のスケーリング極限として得られることをみよう。(D.1.5) に現れる生成子 T_{\pm} を次のように rescaling する。¹

$$T_- \rightarrow -\frac{\sqrt{2}\eta}{\tilde{\eta}}T_-, \quad T_+ \rightarrow -\frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{2}\eta}T_+. \quad (\text{D.2.4})$$

すると time-like な r -行列 (D.1.6) は

$$r_t = 2T_2 \wedge T_1 \rightarrow \sqrt{2}T_2 \wedge \left(\frac{\sqrt{2}\eta}{\tilde{\eta}}T_- - \frac{\tilde{\eta}}{\sqrt{2}\eta}T_+ \right) \quad (\text{D.2.5})$$

と書き換えられる。ここで極限

$$\tilde{\eta} \rightarrow 0, \quad \eta = \text{fixed} \quad (\text{D.2.6})$$

をとると、time-like な r -行列 (D.1.6) は light-like な r -行列 (D.1.6) に帰結する。

$$\lim_{\tilde{\eta} \rightarrow 0} r_t = \frac{\eta}{\tilde{\eta}} r_l + \mathcal{O}(\tilde{\eta}). \quad (\text{D.2.7})$$

この時変形された作用 (D.2.1) は次の形になる。

$$S_{\text{YB}}[g] = \frac{1}{2} \int d\tau \wedge d\sigma \text{Tr} \left(g^{-1} \partial_- g \frac{1}{1 - \eta R_l} g^{-1} \partial_+ g \right). \quad (\text{D.2.8})$$

これは確かに light-like な YB 変形を施された作用である。

このスケーリング極限は trigonometric 処方 of 有理型 1-形式 ω (4.1.1) においても成立している。[108] と同様に、スペクトラルパラメータ $z_{\mathbb{R}}$ を

$$z_{\mathbb{R}} = \alpha \tilde{z}_{\mathbb{R}} \quad (\text{D.2.9})$$

と rescale し、極限 $\alpha \rightarrow 0$ を取る。この時 (4.1.1) の ω の極限は新たな 1-形式 $\tilde{\omega}$ になる。

$$\tilde{\omega} := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \omega = \frac{(1 - \tilde{z}_{\mathbb{R}}^2)}{\tilde{z}_{\mathbb{R}}^2} d\tilde{z}_{\mathbb{R}}. \quad (\text{D.2.10})$$

この $\tilde{\omega}$ は homogeneous YB 変形された PCM に対する有理型 1-形式である。あるいは、これは light-like な変形を施された系のツイスト関数と見なすこともできる。

¹ この rescaling は確かに $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ の代数構造を変えないことに注意せよ。

Appendix E

$\mathfrak{su}(2, 2|4)$ supercoset に基づいた $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 弦理論の記述

この節では Lie superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の supermatrix による表現について述べ、それを用いて $\text{AdS}_5 \times \text{S}^5$ 超弦理論の作用を記述する。

E.1 Lie superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2|4)$

まずは superalgebra $\mathfrak{sl}(4, 4)$ を導入する。これは 8×8 の行列 M を用いて次のように表される。

$$M = \begin{pmatrix} m & \theta \\ -\eta & n \end{pmatrix}, \quad (\text{Str } M = 0). \quad (\text{E.1.1})$$

ここで m, n, θ, η は 4×4 のブロック行列であり、 m, n の成分は通常の可換数であるのに対し、 θ, η の成分は Grassmann 数である。これにより superalgebra $\mathfrak{sl}(4|4)$ は \mathbb{Z}_2 -grading の構造を持つことがわかる。Grassmann 数を成分に持つことから、この代数が閉じているためには通常のトレースではなく supertrace $\text{Str } M := \text{tr } m - \text{tr } n$ が 0 であることを課す必要がある。

Lie superalgebra $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ は $\mathfrak{sl}(4|4)$ の non-compact な実形である。つまり対合 $\tau : \mathfrak{sl}(4|4) \rightarrow \mathfrak{sl}(4|4)$ を

$$\begin{aligned} M &\rightarrow \tau(M) := -HM^\dagger H^{-1}, \\ H &:= \begin{pmatrix} \Sigma & 0 \\ 0 & \mathbf{1}_4 \end{pmatrix}, \quad \Sigma := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{E.1.2})$$

で定義すると、 $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ はその固定点の集合 $\{M \in \mathfrak{sl}(4|4) \mid \tau(M) = M\}$ として定義される。supermatrix に対する共役は $M^\dagger := (M^t)^*$ で定義されている。ここで、Grassmann 数 ψ に対しては“複素共役” $*$ が

$$(c\psi)^* = \bar{c}\psi^*, \quad \psi^{**} = \psi, \quad (\psi_1\psi_2)^* = \psi_2^*\psi_1^* \quad (\text{E.1.3})$$

を満たすものとして定義されていることに注意せよ。これにより共役 † が次の関係を満たすことが保証される。

$$\begin{aligned}
(M_1 M_2)^\dagger &= \left(\begin{pmatrix} m_1 & \theta_1 \\ \eta_1 & n_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_2 & \theta_2 \\ \eta_2 & n_2 \end{pmatrix} \right)^\dagger = \left(\begin{pmatrix} m_1 m_2 + \theta_1 \eta_2 & m_1 \theta_2 + \theta_1 n_2 \\ \eta_1 m_2 + n_1 \eta_2 & \eta_1 \theta_2 + n_1 n_2 \end{pmatrix} \right)^\dagger \\
&= \begin{pmatrix} m_2^\dagger m_1^\dagger + \eta_2^\dagger \theta_1^\dagger & \theta_2^\dagger m_1^\dagger + n_2^\dagger \theta_1^\dagger \\ m_2^\dagger \eta_1^\dagger + \eta_2^\dagger n_1^\dagger & \theta_2^\dagger \eta_1^\dagger + n_2^\dagger n_1^\dagger \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} m_2^\dagger & \eta_2^\dagger \\ \theta_2^\dagger & n_2^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1^\dagger & \eta_1^\dagger \\ \theta_1^\dagger & n_1^\dagger \end{pmatrix} = M_2^\dagger M_1^\dagger.
\end{aligned} \tag{E.1.4}$$

実性条件 $\tau(M) = M$ は次のように書き表すこともできる。

$$M^\dagger H + H M = 0. \tag{E.1.5}$$

これは角ブロックで書き下すと次のようになる。

$$m^\dagger = -\Sigma m \Sigma, \quad n^\dagger = -n, \quad \eta^\dagger = -\Sigma \theta. \tag{E.1.6}$$

以上を踏まえると $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の boson 部分の代数は

$$\mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{su}(4) \oplus \mathfrak{u}(1) \tag{E.1.7}$$

と部分代数に分解できることがわかる。ここで $\mathfrak{u}(1)$ は $i\mathbf{1}_4$ で生成される部分代数である。この $\mathfrak{u}(1)$ ファクターは $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の中心であり、その剰余代数を $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ と呼ぶ。この剰余代数 $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ は 8×8 supermatrix で表現することはできない。

$\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ の boson 的部分代数 $\mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{su}(4)$ の部分代数の基底は Drac 行列

$$\begin{aligned}
\gamma^1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma^4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{E.1.8}$$

を用いて書き表される。これらは $SO(5)$ の Clifford 代数

$$\gamma^i \gamma^j + \gamma^j \gamma^i = 2\delta^{ij}, \quad i, j = 1, \dots, 5 \tag{E.1.9}$$

を表し、 $\gamma^5 = -\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4$ である。また $(\gamma^i)^\dagger = \gamma^i$ であるため、 $i\gamma^i$ は $\mathfrak{su}(4)$ の元である。 $\mathfrak{so}(5)$ は生成子 $n^{ij} := [\gamma^i, \gamma^j]/4$ を用いて構成することができる。さらに、 $n^{i6} := i\gamma^i/2$, $n^{6i} := -i\gamma^i/2$ を導入すると、 $\mathfrak{so}(6)$ の代数構造

$$[n^{ji}, n^{kl}] = \delta^{jk}n^{il} - \delta^{ik}n^{jl} - \delta^{jl}n^{ik} + \delta^{il}n^{jk}, \quad i, j = 1, \dots, 6 \quad (\text{E.1.10})$$

が成立していることがわかる。これは $\mathfrak{so}(6)$ の Weyl 表現であり、もう一方のカイラリティは $n^{i6} = -i\gamma^i/2$ と定義することにより得られる。 $\{n^{ij}\} (i, j = 1, \dots, 6)$ は $\mathfrak{su}(4)$ を生成するため、代数として $\mathfrak{so}(6) \sim \mathfrak{su}(4)$ であることがわかる。以上より、次が従う。

$$\mathfrak{su}(4) \sim \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2}\gamma^i, \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j] \right\}, \quad i, j = 1, \dots, 5. \quad (\text{E.1.11})$$

これらのアナロジーとして、 $\{i\gamma^5, \gamma^i\} (i = 1, \dots, 4)$ によって貼られる $SO(1, 4)$ の Clifford 代数を考えることができる。 $\gamma^0 := i\gamma^5$ と定義すると、 $m^{ij} := [\gamma^i, \gamma^j]/4 (i, j = 0, 1, \dots, 4)$ は $\mathfrak{so}(1, 4)$ の代数を満たすことが直ちにわかる。さらに $\mathfrak{so}(6)$ の場合とは虚数倍定義が異なる $m^{i5} = \gamma^i/2$, $m^{5i} = -\gamma^i/2 (i = 0, \dots, 4)$ を用いると、 $\mathfrak{so}(2, 4)$ の代数

$$\begin{aligned} [m^{ji}, m^{kl}] &= \eta^{jk}m^{il} - \eta^{ik}m^{jl} - \eta^{jl}m^{ik} + \eta^{il}m^{jk}, \quad i, j = 0, \dots, 5, \\ \eta &:= \text{diag}(-1, 1, 1, 1, 1, -1) \end{aligned} \quad (\text{E.1.12})$$

が成立する。これを踏まえると $\mathfrak{so}(2, 4) \sim \mathfrak{su}(2, 2)$ であることがわかり、次のような基底を取れる。

$$\mathfrak{su}(2, 2) \sim \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2}\gamma^i, \frac{i}{2}\gamma^5, \frac{1}{4}[\gamma^i, \gamma^j], \frac{i}{4}[\gamma^5, \gamma^j] \right\}, \quad i, j = 1, \dots, 4. \quad (\text{E.1.13})$$

(E.1.11) と (E.1.13) に $i\mathbf{1}$ を加えることで、 $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の boson 的な部分代数の基底が得られる。

E.2 $\mathfrak{sl}(4|4)$ の \mathbb{Z}_4 -grading

ある Lie 代数の外部自己同型写像はその表現論を取り扱う上で重要な役割を果たす。 $\mathfrak{sl}(4|4)$ の外部自己同型写像として、次のものが考えられる。

$$\delta_\rho(M) = \begin{pmatrix} m & \rho\theta \\ \rho^{-1}\eta & n \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{C}. \quad (\text{E.2.1})$$

つまり、supermatrix の boson 部分は変えずに fermion 部分に dilatation を施す写像である。 δ_ρ はパラメータ ρ を持った $\mathfrak{sl}(4|4)$ に対する連続な群作用であり、いわゆる *hypercharge*

$$\Upsilon := \begin{pmatrix} \mathbf{1}_4 & 0 \\ 0 & -\mathbf{1}_4 \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.2})$$

を用いて次のように表せる。

$$\delta_\rho(M) = \exp\left(\frac{1}{2}\Upsilon \log \rho\right) M \exp\left(-\frac{1}{2}\Upsilon \log \rho\right). \quad (\text{E.2.3})$$

一般には $\text{Str } \Upsilon \neq 0$ であるため、 δ_ρ は確かに外部自己同型写像である。しかし、

$$\exp\left(\frac{1}{2}\Upsilon \log \rho\right) = \begin{pmatrix} \rho^{\frac{1}{2}} \mathbf{1}_4 & 0 \\ 0 & \rho^{-\frac{1}{2}} \mathbf{1}_4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sdet} \left[\exp\left(\frac{1}{2}\Upsilon \log \rho\right) \right] = \rho^4 \quad (\text{E.2.4})$$

であることに着目すると、 $\rho^4 = 1$ を満たすとき δ_ρ は内部自己同型写像であり、その群構造は $\delta_\rho / \{\delta_\rho \mid \rho^4 = 1\}$ に等しい。また、 δ_ρ は $|\rho| = 1$ なるパラメータを用いると $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ に制限することができる。

有限群をなす外部自己同型写像として次のものが考えられる。

$$M \mapsto \Omega(M) := -\mathcal{K} M^{st} \mathcal{K}^{-1}, \quad (\text{E.2.5})$$

$$\mathcal{K} := \text{diag}(K, K),$$

$$K := -\gamma^2 \gamma^4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{E.2.6})$$

ここで、supertransposition

$$M^{st} = \begin{pmatrix} m & \theta \\ \eta & n \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} m^t & -\eta^t \\ \theta^t & n^t \end{pmatrix} \quad (\text{E.2.7})$$

と定義されており、 $(M_1 M_2)^{st} = M_2^{st} M_1^{st}$ を満たす。従って $\Omega(M_1 M_2) = -\Omega(M_2) \Omega(M_1)$ が成立する。

4×4 行列 K は“荷電共役”行列に似た次の性質を持つ。

$$(\gamma^i)^t = K \gamma^i K^{-1}, \quad K^2 = \mathbf{1}_4. \quad (\text{E.2.8})$$

次の関係式

$$\Omega^2(M) = \delta_{-1}(M), \quad \Rightarrow \quad \Omega^4(M) = M \quad (\text{E.2.9})$$

を考慮すると、同型写像 Ω の固有値は i^k ($k = 0, 1, 2, 3$) であることがわかる。今、 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(4, 4)$ とすると、 \mathfrak{g} はベクトル空間として次のように分解することができる。

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} &= \mathfrak{g}^{(0)} \oplus \mathfrak{g}^{(1)} \oplus \mathfrak{g}^{(2)} \oplus \mathfrak{g}^{(3)}, \\ \mathfrak{g}^{(k)} &:= \{M \in \mathfrak{g} \mid \Omega(M) = i^k M\}, \quad k = 0, \dots, 3. \end{aligned} \quad (\text{E.2.10})$$

Ω は自己同型写像であるから、これらの部分空間は \mathbb{Z}_4 -grading

$$[\mathfrak{g}^{(k)}, \mathfrak{g}^{(l)}] \subset \mathfrak{g}^{(k+l)}, \quad \text{modulo } 4 \quad (\text{E.2.11})$$

の性質を持つことが従う。任意の行列 $M \in \mathfrak{g}$ に対して各部分空間への射影 $M^{(k)}$ は次のように与えられる。

$$M^{(k)} = \frac{1}{4} \left(M + i^{3k} \Omega(M) + i^{2k} \Omega^2(M) + i^k \Omega^3(M) \right). \quad (\text{E.2.12})$$

これらの射影を supermatrix (E.1.1) に対して具体的に作用させると以下の表式を得る。

$$\begin{aligned} M^{(0)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m - Km^t K^{-1} & 0 \\ 0 & n - Kn^t K^{-1} \end{pmatrix}, \\ M^{(2)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} m + Km^t K^{-1} & 0 \\ 0 & n + Kn^t K^{-1} \end{pmatrix}, \\ M^{(1)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \theta - iK\eta^t K^{-1} \\ \eta + iK\theta^t K^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ M^{(3)} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \theta + iK\eta^t K^{-1} \\ \eta - iK\theta^t K^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{E.2.13})$$

$M^{(0)}, M^{(2)}$ は boson 部分に、 $M^{(1)}, M^{(3)}$ は fermion 部分に対応していることが読み取れる。

共役と supertranspose の定義により、一般の supermatrix M に対しては $(M^{st})^\dagger \neq (M^\dagger)^{st}$ である。従って Ω と共役の操作も一般には非可換になる。 $M^{(k)}$ に対する具体的な表式 (E.2.13) を見ると、

$$\begin{aligned} \Omega \left(M^{(0)} \right)^\dagger &= \Omega \left(\left(M^{(0)} \right)^\dagger \right), & \Omega \left(M^{(2)} \right)^\dagger &= \Omega \left(\left(M^{(2)} \right)^\dagger \right), \\ \Omega \left(M^{(1)} \right)^\dagger &= -\Omega \left(\left(M^{(1)} \right)^\dagger \right), & \Omega \left(M^{(3)} \right)^\dagger &= -\Omega \left(\left(M^{(3)} \right)^\dagger \right), \end{aligned} \quad (\text{E.2.14})$$

がわかる。hypercharge Υ を用いると、これらをまとめると次のように書き直せる。

$$\Omega(M)^\dagger = \Upsilon \Omega \left(M^\dagger \right) \Upsilon^{-1}. \quad (\text{E.2.15})$$

以上より、射影 (E.2.12) と共役 \dagger が可換であることがわかる。つまり実性条件は射影の後も保存されるため、 $\mathfrak{sl}(4|4)$ を $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ に制限してもベクトル空間の分解 (E.2.10) が一意に定まる。ここで注意しなければならないのは、 $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ に対しては Ω は対角化不可能であるということである。なぜならば $k = 1, 3$ に対しては固有値が複素であり、 $\Omega(M^{(k)}) = i^k M^{(k)}$ で実性条件を破るからである。 $\mathfrak{sl}(4|4)$ の場合にも共役を取る前と後では射影した先の固有値が $\pm i$ で入れ替わることに注意せよ。

以下では $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の場合を考える。 \mathbb{Z}_4 -grading (E.2.11) に注目すると $M^{(0)}$ の生成する空間は $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の部分代数になっていることがわかる。(E.1.11) と (E.1.13) で導入した $\mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{su}(4)$ の基底を思い出そう。(E.2.8) を用いると、 $M^{(0)}$ (E.2.13) のブロック対角成分はそれぞれ $\text{span}_{\mathbb{R}} \{[\gamma_i, \gamma_j]/4\} \sim$

$\mathfrak{so}(5) \subset \mathfrak{su}(4)$ と、 $\text{span}_{\mathbb{R}}\{[\gamma_i, \gamma_j]/4, i[\gamma^i, \gamma^5]/4\} \sim \mathfrak{so}(1, 4) \subset \mathfrak{su}(2, 2)$ に一致している。従って、 $M^{(0)}$ の生成する部分代数は $\mathfrak{so}(1, 4) \oplus \mathfrak{so}(5) \subset \mathfrak{su}(2, 2) \oplus \mathfrak{su}(4)$ と同定される。以上より、一方の boson 部分 $M^{(2)}$ の生成する剰余群は $SU(2, 2) \times SU(4)/SO(1, 4) \times SO(5) \sim \text{AdS}_5 \times S^5$ を含んでいる。¹

$\text{AdS}_5 \times S^5$ 超弦理論の作用

Green-Schwarz 形式の $\text{AdS}_5 \times S^5$ 超弦理論の Lagrangian 密度は無次元化された弦の張力 $g := L^2/2\pi\alpha'$ (L : S^5 の半径) を用いて次のように与えられる [85]。

$$\mathcal{L} = -\frac{g}{2} \left[\gamma^{\alpha\beta} \text{Str}(A_\alpha^{(2)} A_\beta^{(2)}) + \kappa \epsilon^{\alpha\beta} \text{Str}(A_\alpha^{(1)} A_\beta^{(3)}) \right]. \quad (\text{E.2.16})$$

ここで $A := g^{-1}dg \in \mathfrak{su}(2, 2|4)$ は自己同型 Ω を用いて

$$A = A^{(0)} + A^{(1)} + A^{(2)} + A^{(3)} \quad (\text{E.2.17})$$

と分解されている。 $\gamma^{\alpha\beta}$ は世界面の計量であり、 $\epsilon^{\alpha\beta}$ は反対称テンソルである。(E.2.16) の第 1 項は運動項であり、第 2 項は Wess-Zumino 項である。実際、局所的な $SO(1, 4) \times SO(5)$ 変換の下で不変な微分 3 形式は

$$\Theta_3 = \text{Str}(A^{(2)} \wedge A^{(3)} \wedge A^{(3)} - A^{(2)} \wedge A^{(1)} \wedge A^{(1)}) \quad (\text{E.2.18})$$

と与えられるが、これは Poincaré の補題からの帰結として

$$\Theta_3 = \frac{1}{2} d \text{Str} \left(A^{(1)} \wedge A^{(3)} \right) \quad (\text{E.2.19})$$

と書き直せる。この Lagrangian 密度は実であることが確かめられる。

$$\mathcal{L}^* = -\frac{g}{2} \left[\gamma^{\alpha\beta} \text{Str} \left(A_\alpha^{(2)\dagger} A_\beta^{(2)\dagger} \right) + \kappa \epsilon^{\alpha\beta} \text{Str} \left(A_\beta^{(3)\dagger} A_\alpha^{(1)\dagger} \right) \right] = \mathcal{L}. \quad (\text{E.2.20})$$

Lagrangian (E.2.16) の boson 部分を見ると確かに $SU(2, 2) \times SU(4)/SO(1, 4) \times SO(5) \sim \text{AdS}_5 \times S^5$ に値を取っている。また、微分同相不変性と Weyl 不変性は明白である。

GS 形式超弦理論が持つべき非自明な対称性として κ 対称性がある。 κ 対称性は超対称性を保証するために必要な局所的な fermionic 対称性であり、supermatrix を用いると次のように実現されている。

$$\delta_\epsilon A^{(1)} = -d\epsilon^{(1)} + \left[A^{(0)}, \epsilon^{(1)} \right] + \left[A^{(2)}, \epsilon^{(3)} \right], \quad (\text{E.2.21})$$

$$\delta_\epsilon A^{(3)} = -d\epsilon^{(3)} + \left[A^{(2)}, \epsilon^{(1)} \right] + \left[A^{(0)}, \epsilon^{(3)} \right], \quad (\text{E.2.22})$$

¹ただし、 $M^{(2)}$ は中心 $i\mathbf{1}_8 \in \mathfrak{su}(2, 2|4)$ も含んでいることに注意せよ。

$$\delta_\epsilon A^{(2)} = \left[A^{(1)}, \epsilon^{(1)} \right] + \left[A^{(3)}, \epsilon^{(3)} \right], \quad (\text{E.2.23})$$

$$\delta_\epsilon A^{(0)} = \left[A^{(3)}, \epsilon^{(1)} \right] + \left[A^{(1)}, \epsilon^{(3)} \right], \quad (\text{E.2.24})$$

ここで $\epsilon = \epsilon^{(1)} + \epsilon^{(3)}$ は $\mathfrak{psu}(2, 2|4)$ に値を取る fermionic なパラメータである。Lagrangian (E.2.16) が上記の κ 対称性のもとで不変であるためには係数 κ が ± 1 の値を取る必要がある。詳しくは [88] をみよ。

Appendix F

Dressed R -作用素に対する関係式

ここでは dressed R -作用素が満たす関係式 (5.1.37) と (5.2.48) を証明する。

F.1 \mathbb{Z}_2 -grading の場合

まずは関係式 (5.1.37) の証明を与えよう。

Lie 代数の生成子に対して dressed R -作用素 R_g がどのように作用するか調べる。一般に、群要素 g による随伴作用は生成子 $\mathbf{P}_{\hat{a}}$ と $\mathbf{J}_{\hat{a}}$ に対し

$$\text{Ad}_g(\mathbf{P}_{\hat{a}}) = [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}, \quad \text{Ad}_g(\mathbf{J}_{\hat{a}}) = [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{P}_{\hat{a}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \quad (\text{F.1.1})$$

と表現される。よって R_g の $\mathbf{P}_{\hat{a}}$ に対する作用は

$$\begin{aligned} R_g(\mathbf{P}_{\hat{a}}) &= \text{Ad}_{g^{-1}} \circ R([\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}) \\ &= \text{Ad}_{g^{-1}} \left([\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{c}} \mathbf{P}_{\hat{c}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \right) \\ &= [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{c}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{c}}^{\hat{d}} \mathbf{P}_{\hat{d}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{c}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{c}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}} \\ &\quad + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{a}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{a}}^{\hat{c}} \mathbf{P}_{\hat{c}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{a}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \\ &\quad + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{c}} \mathbf{P}_{\hat{c}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \\ &\quad + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{a}} \mathbf{P}_{\hat{a}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{c}} \mathbf{J}_{\hat{c}} \end{aligned} \quad (\text{F.1.2})$$

と評価できる。

次に \tilde{g} による随伴作用を考える。 \tilde{g} が \mathbb{Z}_2 -grading 自己同型写像 (5.1.36) を用いて定義されていたことを思い出すと、Campbell-Baker-Hausdorff の公式と \mathfrak{g} の \mathbb{Z}_2 -grading の性質により、

$$\text{Ad}_{\tilde{g}}(\mathbf{P}_{\hat{a}}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\text{ad}_{X^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}}} + \text{ad}_{X^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}}})^n (\mathbf{P}_{\hat{a}})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left((\text{even number of } \text{ad}_{X^{\hat{b}}\mathbf{P}_{\hat{b}}}) - (\text{odd number of } \text{ad}_{X^{\hat{b}}\mathbf{P}_{\hat{b}}}) \right) (\mathbf{P}_{\hat{a}}) \\
&= [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}}, \tag{F.1.3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Ad}_{\tilde{g}}(\mathbf{J}_{\hat{a}}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-\text{ad}_{X^{\hat{b}}\mathbf{P}_{\hat{b}}} + \text{ad}_{X^{\hat{b}}\mathbf{J}_{\hat{b}}})^n (\mathbf{J}_{\hat{a}}) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-(\text{odd number of } \text{ad}_{X^{\hat{b}}\mathbf{P}_{\hat{b}}}) + (\text{even number of } \text{ad}_{X^{\hat{b}}\mathbf{P}_{\hat{b}}}) \right) (\mathbf{J}_{\hat{a}}) \\
&= -[\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \tag{F.1.4}
\end{aligned}$$

という関係を得る。これらの結果をまとめると、

$$\text{Ad}_{\tilde{g}}(\mathbf{P}_{\hat{a}}) = [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}, \quad \text{Ad}_{\tilde{g}}(\mathbf{J}_{\hat{a}}) = -[\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{P}_{\hat{a}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}}, \tag{F.1.5}$$

$$(\Leftrightarrow \quad f \circ \text{Ad}_{\tilde{g}} \circ f = \text{Ad}_g) \tag{F.1.6}$$

を得る。これらの関係式と (5.1.11) で定義された \tilde{R} を用いると、 $\tilde{R}_{\tilde{g}}$ の $\mathbf{P}_{\hat{a}}$ に対する作用は

$$\begin{aligned}
\tilde{R}_{\tilde{g}}(\mathbf{P}_{\hat{a}}) &= \text{Ad}_{\tilde{g}^{-1}} \circ \tilde{R}([\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}) \\
&= \text{Ad}_{\tilde{g}^{-1}} \circ f^{-1} \circ R(-[\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}}) \\
&= \text{Ad}_{\tilde{g}^{-1}} \left([\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{c}} \mathbf{P}_{\hat{c}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}} + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \right) \\
&= [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{c}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{c}}^{\hat{d}} \mathbf{P}_{\hat{d}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{c}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{c}}^{\hat{a}} \mathbf{J}_{\hat{a}} \\
&\quad + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{a}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{a}}^{\hat{c}} \mathbf{P}_{\hat{c}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{b}} R_{\hat{b}}^{\hat{a}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{a}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \\
&\quad + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{c}} \mathbf{P}_{\hat{c}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{b}} \mathbf{J}_{\hat{b}} \\
&\quad + [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{b}} \mathbf{P}_{\hat{b}} - [\text{Ad}_g]_{\hat{a}}^{\hat{a}} R_{\hat{a}}^{\hat{b}} [\text{Ad}_{g^{-1}}]_{\hat{b}}^{\hat{c}} \mathbf{J}_{\hat{c}} \tag{F.1.7}
\end{aligned}$$

と与えられる。(F.1.2) と (F.1.7) を足し合わせるにより、直ちに関係式 (5.1.37) が得られる。

F.2 $SU(2, 2|4)$ の場合

$\mathfrak{su}(2, 2|4)$ 上の dressed R -作用素 R_{g_k} ($k = 1, \dots, 4$) に対して関係式 (5.2.48) が成立することを証明しよう。

前節での場合と同様に g_k の随伴作用が $\mathfrak{su}(2, 2|4)$ の生成子に対してどのように作用するかを調べると、

$$\text{Ad}_{g_k} \circ P^{(n)} = \sum_{s=0}^3 i^{(s-n)(k-1)} P^{(s)} \circ \text{Ad}_g \circ P^{(n)}, \tag{F.2.1}$$

$$P^{(m)} \circ \text{Ad}_{g_k}^{-1} = \sum_{r=0}^3 i^{(m-r)(k-1)} P^{(m)} \circ \text{Ad}_g^{-1} \circ P^{(r)} \quad (\text{F.2.2})$$

という関係式を得る。これは (F.1.5) の拡張であり、確かに $k = 2, n = 0, 2$ として g を bosonic セクターに制限した時に (F.1.5) に一致することがわかる。この関係式と R_{g_k} の定義 (5.2.14) を用いると、射影された dressed R -作用素 $P^{(m)} \circ R_{g_k} \circ P^{(n)}$ は

$$\begin{aligned} P^{(m)} \circ R_{g_k} \circ P^{(n)} &= P^{(m)} \circ \text{Ad}_{g_k}^{-1} \circ f_s^{k-1} \circ R \circ f_s^{-(k-1)} \circ \left(\sum_{s=0}^3 i^{(s-n)(k-1)} P^{(s)} \circ \text{Ad}_g \circ P^{(n)} \right) \\ &= P^{(m)} \circ \text{Ad}_{g_k}^{-1} \circ f_s^{k-1} \circ \left(\sum_{s=0}^3 i^{(s-n)(k-1)-s(k-1)} R \circ P^{(s)} \circ \text{Ad}_g \circ P^{(n)} \right) \\ &= P^{(m)} \circ \text{Ad}_{g_k}^{-1} \circ \left(\sum_{r,s=0}^3 i^{-n(k-1)+r(k-1)} P^{(r)} \circ R \circ P^{(s)} \circ \text{Ad}_g \circ P^{(n)} \right) \\ &= \left(\sum_{r,s=0}^3 i^{(m-n)(k-1)} P^{(m)} \circ \text{Ad}_{g_k}^{-1} \circ P^{(r)} \circ R \circ P^{(s)} \circ \text{Ad}_g \circ P^{(n)} \right) \\ &= i^{(m-n)(k-1)} P^{(m)} \circ R_g \circ P^{(n)} \end{aligned} \quad (\text{F.2.3})$$

と表される。これにより関係式 (5.2.48) が示された。

Appendix G

Homogeneous bi-YB シグマ模型

この節では homogeneous bi-YB 変形された主カイラル模型の作用を導出する。homogeneous bi-YB 変形とは homogeneous YB 変形の 2 パラメータへの一般化であり、この場合のツイスト関数は対称コセット模型のツイスト関数 (5.1.3) と同一である。

境界条件

boundary EOM(5.1.5) への解として次のものを考える。

$$(A|_{z=1}, \partial_z A|_{z=1}) \in \mathfrak{g}_{R_R}^{\mathbb{C}}, \quad (A|_{z=-1}, \partial_z A|_{z=-1}) \in \mathfrak{g}_{R_L}^{\mathbb{C}}, \quad (\text{G.0.1})$$

ここで、 $\mathfrak{g}_R^{\mathbb{C}}$ と $\mathfrak{g}_L^{\mathbb{C}}$ は

$$\mathfrak{g}_{R_R}^{\mathbb{C}} := \left\{ (2\eta_R R_R(x), x) \mid x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \right\}, \quad \mathfrak{g}_{R_L}^{\mathbb{C}} := \left\{ (-2\eta_L R_L(x), x) \mid x \in \mathfrak{g}^{\mathbb{C}} \right\} \quad (\text{G.0.2})$$

と定義されている。上で現れた η_R と η_L は変形パラメータであり、 R_R と R は共に hCYBE (A.2.28) を満たす線形な R -作用素である。

Lax 形式

ツイスト関数 (5.1.3) の各極での \hat{g} の値を

$$\hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=1} = g_R(\tau, \sigma), \quad \hat{g}(\tau, \sigma, z)|_{z=-1} = g_L(\tau, \sigma) \quad (\text{G.0.3})$$

と書くことにしよう。 g_R と g_L は実性条件を課すことにより G の元となることに注意せよ。各極でのゲージ場 A と Lax 形式 \mathcal{L} の関係はそれぞれ

$$A|_{z=1} = -dg_R g_R^{-1} + \text{Ad}_{g_R} \mathcal{L}|_{z=1}, \quad A|_{z=-1} = -dg_L g_L^{-1} + \text{Ad}_{g_L} \mathcal{L}|_{z=-1} \quad (\text{G.0.4})$$

と書ける。今、ツイスト関数 (5.1.3) は対称コセットと同じものを使っているため、Lax 形式に対して同じ仮設をたてることことができる。

$$\mathcal{L} = (U_+ + zV_+) d\sigma^+ + (U_- + z^{-1}V_-) d\sigma^-. \quad (\text{G.0.5})$$

解 (G.0.1) は

$$A|_{z=1} = 2\eta_R R_R(\partial_z A|_{z=1}), \quad A|_{z=-1} = -2\eta_L R_L(\partial_z A|_{z=-1}) \quad (\text{G.0.6})$$

を意味する。(G.0.4), (G.0.5), (G.0.6) を用いることで、カレントが

$$g_R^{-1}\partial_{\pm}g_R = U_{\pm} + (1 \mp 2\eta_R R_{R,g_R})(V_{\pm}), \quad (\text{G.0.7})$$

$$g_L^{-1}\partial_{\pm}g_L = U_{\pm} - (1 \mp 2\eta_L R_{L,g_L})(V_{\pm}) \quad (\text{G.0.8})$$

を満たすことがわかる。これらの方程式を解き、Lax 形式から U_{\pm} を消去すると次の表式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\pm} &= g_R^{-1}\partial_{\pm}g_R - (1 \mp \eta_R R_{R,g_R})(V_{\pm}) + z^{\pm 1}V_{\pm} \\ &= g_L^{-1}\partial_{\pm}g_L + (1 \mp \eta_L R_{L,g_L})(V_{\pm}) + z^{\pm 1}V_{\pm}. \end{aligned} \quad (\text{G.0.9})$$

ここで V_{\pm} が未だ残っているが、これらは g_R と g_L 両方含む形

$$V_{\pm} = \frac{1}{1 \mp \eta_R R_{R,g_R} \mp \eta_L R_{L,g_L}} \left(\frac{g_R^{-1}\partial_{\pm}g_R - g_L^{-1}\partial_{\pm}g_L}{2} \right) \quad (\text{G.0.10})$$

で書き記すことができる。

変形された作用

以上の結果を使うと homogeneous bi-YB 変形されたシグマ模型の作用を導出することができる。Lax pair の表式 (G.0.9) を参照すると、 $z = \pm 1$ での留数 $\varphi_c \mathcal{L}$ は

$$\text{res}_{z=1}(\varphi_c \mathcal{L}) = 4K(V_+ d\sigma^+ - V_- d\sigma^-), \quad (\text{G.0.11})$$

$$\text{res}_{z=-1}(\varphi_c \mathcal{L}) = -4K(V_+ d\sigma^+ - V_- d\sigma^-) \quad (\text{G.0.12})$$

と評価できるため、2次元の作用が

$$S[g_R, g_L] = K \int_{\Sigma} \langle g_R^{-1}\partial_+g_R - g_L^{-1}\partial_+g_L, V_- \rangle d\sigma \wedge d\tau \quad (\text{G.0.13})$$

と従う。これは homogeneous bi-YB 変形シグマ模型の作用であるが、標準的な形ではない。

bi-YB 変形された作用を顕に見るために、2次元のゲージ自由度 (3.3.26) $g_x \mapsto g_x h$ ($h \in G$) を利用しよう。すると、次の配位を取ることができる。

$$g_R = g, \quad g_L = 1 \quad g \in G. \quad (\text{G.0.14})$$

このゲージ固定により、作用 (G.0.13) は

$$S[g] = \frac{K}{2} \int_{\Sigma} \left\langle g^{-1} \partial_+ g, \frac{1}{1 + \eta_R R_{R,g} + \eta_L R_L} g^{-1} \partial_- g \right\rangle d\sigma \wedge d\tau \quad (\text{G.0.15})$$

となる。これは homogeneous bi-YB 変形されたシグマ模型の標準的な表式である。また、上記のゲージ固定により Lax pair (G.0.9) はより簡単な以下の形になる。

$$\mathcal{L}_{\pm} = \frac{1 + z^{\pm 1} \mp \eta_L R_L}{2} \left(\frac{1}{1 \mp \eta_R R_{R,g} \mp \eta_L R_L} g^{-1} \partial_{\pm} g \right). \quad (\text{G.0.16})$$

Bibliography

- [1] L. Faddeev and L. Takhtajan, “The Quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ model,” *Russ. Math. Surveys* **34** no. 5, (1979) 11–68.
- [2] P. Kulish and E. Sklyanin, “Quantum inverse scattering method and the Heisenberg ferromagnet,” *Phys. Lett. A* **70** (1979) 461–463.
- [3] L. Faddeev, E. Sklyanin, and L. Takhtajan, “The Quantum Inverse Problem Method. 1,” *Theor. Math. Phys.* **40** (1980) 688–706.
- [4] K. Costello, “Supersymmetric gauge theory and the Yangian,” [arXiv:1303.2632 \[hep-th\]](#).
- [5] K. Costello, “Integrable lattice models from four-dimensional field theories,” *Proc. Symp. Pure Math.* **88** (2014) 3–24, [arXiv:1308.0370 \[hep-th\]](#).
- [6] K. Costello, E. Witten, and M. Yamazaki, “Gauge Theory and Integrability, I,” *ICCM Not.* **06** no. 1, (2018) 46–119, [arXiv:1709.09993 \[hep-th\]](#).
- [7] K. Costello, E. Witten, and M. Yamazaki, “Gauge Theory and Integrability, II,” *ICCM Not.* **06** no. 1, (2018) 120–146, [arXiv:1802.01579 \[hep-th\]](#).
- [8] K. Costello and M. Yamazaki, “Gauge Theory And Integrability, III,” [arXiv:1908.02289 \[hep-th\]](#).
- [9] N. A. Nekrasov and S. L. Shatashvili, “Quantization of Integrable Systems and Four Dimensional Gauge Theories,” in *16th International Congress on Mathematical Physics*, pp. 265–289. 8, 2009. [arXiv:0908.4052 \[hep-th\]](#).
- [10] R. Moraru and N. Saulina, “OPE of Wilson-’t Hooft operators in N=4 and N=2 SYM with gauge group G=PSU(3),” [arXiv:1206.6896 \[hep-th\]](#).

- [11] M. Yamazaki, “New Integrable Models from the Gauge/YBE Correspondence,” *J. Statist. Phys.* **154** (2014) 895, [arXiv:1307.1128 \[hep-th\]](#).
- [12] L. Ferro, “Yangian Symmetry in N=4 super Yang-Mills,” [arXiv:1107.1776 \[hep-th\]](#).
- [13] K. Costello and B. Stefański, “Chern-Simons Origin of Superstring Integrability,” *Phys. Rev. Lett.* **125** no. 12, (2020) 121602, [arXiv:2005.03064 \[hep-th\]](#).
- [14] D. Gaiotto, J. H. Lee, and J. Wu, “Integrable Kondo problems,” [arXiv:2003.06694 \[hep-th\]](#).
- [15] D. Gaiotto, J. H. Lee, B. Vicedo, and J. Wu, “Kondo line defects and affine Gaudin models,” [arXiv:2010.07325 \[hep-th\]](#).
- [16] R. Bittleston and D. Skinner, “Twistors, the ASD Yang-Mills equations, and 4d Chern-Simons theory,” [arXiv:2011.04638 \[hep-th\]](#).
- [17] V. Caudrelier, M. Stoppato, and B. Vicedo, “On the Zakharov-Mikhailov action: 4d Chern-Simons origin and covariant Poisson algebra of the Lax connection,” [arXiv:2012.04431 \[hep-th\]](#).
- [18] O. Fukushima, J.-i. Sakamoto, and K. Yoshida, “The Faddeev-Reshetikhin model from a 4D Chern-Simons theory,” [arXiv:2012.07370 \[hep-th\]](#).
- [19] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro, and B. Vicedo, “A unifying 2d action for integrable σ -models from 4d Chern-Simons theory,” [arXiv:1909.13824 \[hep-th\]](#).
- [20] O. Fukushima, J.-i. Sakamoto, and K. Yoshida, “Comments on η -deformed principal chiral model from 4D Chern-Simons theory,” *Nucl. Phys. B* **957** (2020) 115080, [arXiv:2003.07309 \[hep-th\]](#).
- [21] O. Fukushima, J.-i. Sakamoto, and K. Yoshida, “Yang-Baxter deformations of the $\text{AdS}_5 \times S^5$ supercoset sigma model from 4D Chern-Simons theory,” *JHEP* **09** (2020) 100, [arXiv:2005.04950 \[hep-th\]](#).
- [22] J. Tian, “Comments on λ -deformed models from 4D Chern-Simons theory,” [arXiv:2005.14554 \[hep-th\]](#).

- [23] J. Tian, Y.-J. He, and B. Chen, “ λ -deformed $AdS_5 \times S^5$ superstring from 4D Chern-Simons theory,” [arXiv:2007.00422](#) [hep-th].
- [24] B. Hoare and S. Lacroix, “Yang-Baxter deformations of the Principal Chiral Model plus Wess-Zumino term,” [arXiv:2009.00341](#) [hep-th].
- [25] D. M. Schmidtt, “Holomorphic Chern-Simons theory and lambda models: PCM case,” *JHEP* **04** (2020) 060, [arXiv:1912.07569](#) [hep-th].
- [26] S. Lacroix and B. Vicedo, “Integrable \mathcal{E} -models, 4d Chern-Simons theory and affine Gaudin models, I – Lagrangian aspects,” [arXiv:2011.13809](#) [hep-th].
- [27] M. Benini, A. Schenkel, and B. Vicedo, “Homotopical analysis of 4d Chern-Simons theory and integrable field theories,” [arXiv:2008.01829](#) [hep-th].
- [28] B. Vicedo, “Holomorphic Chern-Simons theory and affine Gaudin models,” [arXiv:1908.07511](#) [hep-th].
- [29] N. Beisert *et al.*, “Review of AdS/CFT Integrability: An Overview,” *Lett. Math. Phys.* **99** (2012) 3–32, [arXiv:1012.3982](#) [hep-th].
- [30] J. A. Minahan and K. Zarembo, “The Bethe ansatz for N=4 superYang-Mills,” *JHEP* **03** (2003) 013, [arXiv:hep-th/0212208](#).
- [31] N. Beisert, “The complete one loop dilatation operator of N=4 superYang-Mills theory,” *Nucl. Phys. B* **676** (2004) 3–42, [arXiv:hep-th/0307015](#).
- [32] N. Beisert and M. Staudacher, “The N=4 SYM integrable super spin chain,” *Nucl. Phys. B* **670** (2003) 439–463, [arXiv:hep-th/0307042](#).
- [33] N. Beisert, “The Dilatation operator of N=4 super Yang-Mills theory and integrability,” *Phys. Rept.* **405** (2004) 1–202, [arXiv:hep-th/0407277](#).
- [34] N. Beisert and M. Staudacher, “Long-range $psu(2,2-4)$ Bethe Ansatzes for gauge theory and strings,” *Nucl. Phys. B* **727** (2005) 1–62, [arXiv:hep-th/0504190](#).
- [35] N. Beisert, V. Dippel, and M. Staudacher, “A Novel long range spin chain and planar N=4 super Yang-Mills,” *JHEP* **07** (2004) 075, [arXiv:hep-th/0405001](#).

- [36] S. Frolov and A. A. Tseytlin, “Semiclassical quantization of rotating superstring in $AdS(5) \times S^{**5}$,” *JHEP* **06** (2002) 007, [arXiv:hep-th/0204226](#).
- [37] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, and K. Zarembo, “Classical/quantum integrability in AdS/CFT ,” *JHEP* **05** (2004) 024, [arXiv:hep-th/0402207](#).
- [38] K. Zarembo, “Semiclassical Bethe Ansatz and AdS/CFT ,” *Comptes Rendus Physique* **5** (2004) 1081–1090, [arXiv:hep-th/0411191](#).
- [39] I. Bena, J. Polchinski, and R. Roiban, “Hidden symmetries of the $AdS(5) \times S^{**5}$ superstring,” *Phys. Rev. D* **69** (2004) 046002, [arXiv:hep-th/0305116](#).
- [40] H. Itoyama and T. Oota, “The $AdS(5) \times S^{**5}$ superstrings in the generalized light-cone gauge,” *Prog. Theor. Phys.* **117** (2007) 957–972, [arXiv:hep-th/0610325](#).
- [41] B. Vicedo, “Hamiltonian dynamics and the hidden symmetries of the $AdS(5) \times S^{**5}$ superstring,” *JHEP* **01** (2010) 102, [arXiv:0910.0221 \[hep-th\]](#).
- [42] C. Klimcik, “Yang-Baxter sigma models and dS/AdS T duality,” *JHEP* **12** (2002) 051, [arXiv:hep-th/0210095](#).
- [43] C. Klimcik, “On integrability of the Yang-Baxter sigma-model,” *J. Math. Phys.* **50** (2009) 043508, [arXiv:0802.3518 \[hep-th\]](#).
- [44] F. Delduc, M. Magro, and B. Vicedo, “On classical q -deformations of integrable sigma-models,” *JHEP* **11** (2013) 192, [arXiv:1308.3581 \[hep-th\]](#).
- [45] T. Matsumoto and K. Yoshida, “Yang–Baxter sigma models based on the CYBE,” *Nucl. Phys. B* **893** (2015) 287–304, [arXiv:1501.03665 \[hep-th\]](#).
- [46] F. Delduc, M. Magro, and B. Vicedo, “An integrable deformation of the $AdS_5 \times S^5$ superstring action,” *Phys. Rev. Lett.* **112** no. 5, (2014) 051601, [arXiv:1309.5850 \[hep-th\]](#).
- [47] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, and K. Yoshida, “Jordanian deformations of the $AdS_5 \times S^5$ superstring,” *JHEP* **04** (2014) 153, [arXiv:1401.4855 \[hep-th\]](#).
- [48] R. G. Leigh and M. J. Strassler, “Exactly marginal operators and duality in four-dimensional $N=1$ supersymmetric gauge theory,” *Nucl. Phys. B* **447** (1995) 95–136, [arXiv:hep-th/9503121](#).

- [49] O. Lunin and J. M. Maldacena, “Deforming field theories with $U(1) \times U(1)$ global symmetry and their gravity duals,” *JHEP* **05** (2005) 033, [arXiv:hep-th/0502086](#).
- [50] T. Matsumoto and K. Yoshida, “Lunin-Maldacena backgrounds from the classical Yang-Baxter equation - towards the gravity/CYBE correspondence,” *JHEP* **06** (2014) 135, [arXiv:1404.1838 \[hep-th\]](#).
- [51] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, and K. Yoshida, “On the classical equivalence of monodromy matrices in squashed sigma model,” *JHEP* **06** (2012) 082, [arXiv:1203.3400 \[hep-th\]](#).
- [52] L. Faddeev and N. Reshetikhin, “Integrability of the Principal Chiral Field Model in (1+1)-dimension,” *Annals Phys.* **167** (1986) 227.
- [53] O. Babelon, D. Bernard, and M. Talon, *Introduction to Classical Integrable Systems*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [54] L. Faddeev and L. Takhtajan, *HAMILTONIAN METHODS IN THE THEORY OF SOLITONS*. 1987.
- [55] A. K. Das, *Integrable models*, vol. 30. 1989.
- [56] V. G. Drinfel’d, “Hopf algebras and the quantum yang-baxter equation,” in *Yang-Baxter Equation in Integrable Systems*, pp. 264–268. World Scientific, 1990.
- [57] M. Jimbo, “A q-difference analogue of $u(\mathfrak{g})$ and the yang-baxter equation,” in *Yang-Baxter Equation In Integrable Systems*, pp. 292–298. World Scientific, 1990.
- [58] A. Stolin and P. P. Kulish, “New rational solutions of Yang-Baxter equation and deformed Yangians,” *Czechoslovak Journal of Physics* no. 1, (1997) 123–129, [arXiv:q-alg/960801](#).
- [59] P. Kulish, V. Lyakhovsky, and A. Mudrov, “Extended jordanian twists for Lie algebras,” *J. Math. Phys.* **40** (1999) 4569, [arXiv:math/9806014](#).
- [60] J. M. Maillet, “Kac-moody Algebra and Extended {Yang-Baxter} Relations in the $O(N)$ Nonlinear σ Model,” *Phys. Lett. B* **162** (1985) 137–142.
- [61] J. M. Maillet, “New Integrable Canonical Structures in Two-dimensional Models,” *Nucl. Phys. B* **269** (1986) 54–76.

- [62] F. Delduc, M. Magro, and B. Vicedo, “Alleviating the non-ultralocality of coset sigma models through a generalized Faddeev-Reshetikhin procedure,” *JHEP* **08** (2012) 019, [arXiv:1204.0766 \[hep-th\]](#).
- [63] F. Delduc, M. Magro, and B. Vicedo, “Alleviating the non-ultralocality of the $AdS_5 \times S^5$ superstring,” *JHEP* **10** (2012) 061, [arXiv:1206.6050 \[hep-th\]](#).
- [64] C. Appadu, T. J. Hollowood, and D. Price, “Quantum Inverse Scattering and the Lambda Deformed Principal Chiral Model,” *J. Phys. A* **50** no. 30, (2017) 305401, [arXiv:1703.06699 \[hep-th\]](#).
- [65] K. Pohlmeyer, “Integrable Hamiltonian Systems and Interactions Through Quadratic Constraints,” *Commun. Math. Phys.* **46** (1976) 207–221.
- [66] K. Pohlmeyer and K.-H. Rehren, “Reduction of the Two-dimensional $O(n)$ Nonlinear Sigma Model,” *J. Math. Phys.* **20** (1979) 2628.
- [67] H. Eichenherr and K. Pohlmeyer, “Lax Pairs for Certain Generalizations of the {Sine-Gordon} Equation,” *Phys. Lett. B* **89** (1979) 76–78.
- [68] V. Zakharov and A. Mikhailov, “Relativistically Invariant Two-Dimensional Models in Field Theory Integrable by the Inverse Problem Technique,” *Sov. Phys. JETP* **47** (1978) 1017–1027.
- [69] H. Eichenherr, “Infinitely Many Conserved Local Charges for the $\{CP\}^{N-1}$ Models,” *Phys. Lett. B* **90** (1980) 121–124.
- [70] H. Eichenherr and J. Honerkamp, “Reduction of the $\{CP\}^N$ Nonlinear σ Model,” *J. Math. Phys.* **22** (1981) 374.
- [71] R. D’Auria, T. Regge, and S. Sciuto, “A General Scheme for Bidimensional Models With Associate Linear Set,” *Phys. Lett. B* **89** (1980) 363–366.
- [72] R. D’Auria, T. Regge, and S. Sciuto, “Group Theoretical Construction of Two-dimensional Models With Infinite Set of Conservation Laws,” *Nucl. Phys. B* **171** (1980) 167–188.
- [73] R. D’Auria and S. Sciuto, “Group Theoretical Construction of Two-dimensional Supersymmetric Models,” *Nucl. Phys. B* **171** (1980) 189–208.

- [74] J. Kluson, “Current Algebra and Integrability of Principal Chiral Model on the World-sheet with General Metric,” *JHEP* **04** (2007) 040, [arXiv:hep-th/0703003](#).
- [75] J. Kluson, “BRST Invariance of Non-local Charges and Monodromy Matrix of Bosonic String on $AdS(5) \times S^5$,” *Int. J. Mod. Phys. A* **22** (2007) 2239–2263, [arXiv:hep-th/0701013](#).
- [76] A. K. Das, J. Maharana, A. Melikyan, and M. Sato, “The Algebra of transition matrices for the $AdS(5) \times S^5$ superstring,” *JHEP* **12** (2004) 055, [arXiv:hep-th/0411200](#).
- [77] D. Korotkin and H. Samtleben, “Yangian symmetry in integrable quantum gravity,” *Nucl. Phys. B* **527** (1998) 657–689, [arXiv:hep-th/9710210](#).
- [78] N. Dorey and B. Vicedo, “A Symplectic Structure for String Theory on Integrable Backgrounds,” *JHEP* **03** (2007) 045, [arXiv:hep-th/0606287](#).
- [79] N. Dorey and B. Vicedo, “On the dynamics of finite-gap solutions in classical string theory,” *JHEP* **07** (2006) 014, [arXiv:hep-th/0601194](#).
- [80] J. M. Maillet, “Hamiltonian Structures for Integrable Classical Theories From Graded Kac-moody Algebras,” *Phys. Lett. B* **167** (1986) 401–405.
- [81] E. Witten, “Integrable Lattice Models From Gauge Theory,” *Adv. Theor. Math. Phys.* **21** (2017) 1819–1843, [arXiv:1611.00592](#) [hep-th].
- [82] I. Kawaguchi, T. Matsumoto, and K. Yoshida, “The classical origin of quantum affine algebra in squashed sigma models,” *JHEP* **04** (2012) 115, [arXiv:1201.3058](#) [hep-th].
- [83] N. Beisert and F. Luecker, “Construction of Lax Connections by Exponentiation,” *J. Math. Phys.* **53** (2012) 122304, [arXiv:1207.3325](#) [math-ph].
- [84] I. Cherednik, “Relativistically Invariant Quasiclassical Limits of Integrable Two-dimensional Quantum Models,” *Theor. Math. Phys.* **47** (1981) 422–425.
- [85] R. Metsaev and A. A. Tseytlin, “Type IIB superstring action in $AdS(5) \times S^5$ background,” *Nucl. Phys. B* **533** (1998) 109–126, [arXiv:hep-th/9805028](#).
- [86] F. Delduc, S. Lacroix, M. Magro, and B. Vicedo, “On the Hamiltonian integrability of the bi-Yang-Baxter sigma-model,” *JHEP* **03** (2016) 104, [arXiv:1512.02462](#) [hep-th].

- [87] T. Matsumoto and K. Yoshida, “Yang–Baxter sigma models based on the CYBE,” *Nucl. Phys. B* **893** (2015) 287–304, [arXiv:1501.03665](#) [hep-th].
- [88] G. Arutyunov and S. Frolov, “Foundations of the $AdS_5 \times S^5$ Superstring. Part I,” *J. Phys. A* **42** (2009) 254003, [arXiv:0901.4937](#) [hep-th].
- [89] T. Klose and K. Zarembo, “Bethe ansatz in stringy sigma models,” *J. Stat. Mech.* **0605** (2006) P05006, [arXiv:hep-th/0603039](#).
- [90] J. Miramontes, “Pohlmeyer reduction revisited,” *JHEP* **10** (2008) 087, [arXiv:0808.3365](#) [hep-th].
- [91] B. Vicedo, “Deformed integrable σ -models, classical R-matrices and classical exchange algebra on Drinfel’d doubles,” *J. Phys. A* **48** no. 35, (2015) 355203, [arXiv:1504.06303](#) [hep-th].
- [92] B. Hoare and A. Tseytlin, “On integrable deformations of superstring sigma models related to $AdS_n \times S^n$ supercosets,” *Nucl. Phys. B* **897** (2015) 448–478, [arXiv:1504.07213](#) [hep-th].
- [93] S. Frolov, “Lax pair for strings in Lunin-Maldacena background,” *JHEP* **05** (2005) 069, [arXiv:hep-th/0503201](#).
- [94] L. F. Alday, G. Arutyunov, and S. Frolov, “Green-Schwarz strings in TsT-transformed backgrounds,” *JHEP* **06** (2006) 018, [arXiv:hep-th/0512253](#).
- [95] T. Matsumoto and K. Yoshida, “Integrability of classical strings dual for noncommutative gauge theories,” *JHEP* **06** (2014) 163, [arXiv:1404.3657](#) [hep-th].
- [96] D. Osten and S. J. van Tongeren, “Abelian Yang–Baxter deformations and TsT transformations,” *Nucl. Phys. B* **915** (2017) 184–205, [arXiv:1608.08504](#) [hep-th].
- [97] K. Costello and B. Stefański, “Chern-Simons Origin of Superstring Integrability,” *Phys. Rev. Lett.* **125** no. 12, (2020) 121602, [arXiv:2005.03064](#) [hep-th].
- [98] K. Costello and J. Yagi, “Unification of integrability in supersymmetric gauge theories,” [arXiv:1810.01970](#) [hep-th].

- [99] R. Reid-Edwards, “Bi-Algebras, Generalised Geometry and T-Duality,” arXiv:1001.2479 [hep-th].
- [100] D. Lüst and D. Osten, “Generalised fluxes, Yang-Baxter deformations and the $O(d,d)$ structure of non-abelian T-duality,” *JHEP* **05** (2018) 165, arXiv:1803.03971 [hep-th].
- [101] J. Vysoký, *Poisson structures on Lie groups (DIPLOMA THESIS)*, 2009 (accessed February 3, 2014). https://physics.fjfi.cvut.cz/publications/mf/2008/Vysoky_thesis.pdf.
- [102] C. Klimčík, “Affine Poisson and affine quasi-Poisson T-duality,” *Nucl. Phys. B* **939** (2019) 191–232, arXiv:1809.01614 [hep-th].
- [103] L. Hlavaty and L. Snobl, “Classification of 6-dimensional manin triples,” arXiv:math/0202209.
- [104] L. Snobl and L. Hlavaty, “Classification of six-dimensional real Drinfeld doubles,” *Int. J. Mod. Phys. A* **17** (2002) 4043–4068, arXiv:math/0202210.
- [105] J.-i. Sakamoto, Y. Sakatani, and K. Yoshida, “Homogeneous Yang-Baxter deformations as generalized diffeomorphisms,” *J. Phys. A* **50** no. 41, (2017) 415401, arXiv:1705.07116 [hep-th].
- [106] J.-I. Sakamoto and Y. Sakatani, “Local β -deformations and Yang-Baxter sigma model,” *JHEP* **06** (2018) 147, arXiv:1803.05903 [hep-th].
- [107] H. Georgi, *Lie algebras in Particle Physics: From isospin to unified theories (Frontiers in Physics)*. Westview Press Incorporated, 1999.
- [108] I. Kawaguchi and K. Yoshida, “Exotic symmetry and monodromy equivalence in Schrodinger sigma models,” *JHEP* **02** (2013) 024, arXiv:1209.4147 [hep-th].
- [109] D. Israel, C. Kounnas, D. Orlando, and P. Petropoulos, “Electric/magnetic deformations of S^3 and $AdS(3)$, and geometric cosets,” *Fortsch. Phys.* **53** (2005) 73–104, arXiv:hep-th/0405213.